Niveau(x) d'enseignement: 3 Numéro EDUQ : 8270376
Centre d'intérêt: 89

Lunkenbein, Dieter, 1937- .

Structuration intérieure d'objets géométriques dans la genèse d'idées spatiales / par Dieter Lunkenbein, Huguette Allard, Cécile Goupille ; assistants à la production, J. Roy et P. Allard ; [pour la] Section enseignement. -- [Sherbrooke] : Université de Sherbrooke, Département de mathématiques, 1982.
87 p. : graph. ; 28 cm. -- (Rapport / Université de Sherbrooke, Département de mathématiques ; 35)

En tête du titre: Le concept de groupement de Jean Piaget comme outil de rationalisation des interventions didactiques. "Accompagné d'un montage audiovisuel intitulé: Comptage de faces et structuration intérieure de polyèdres" -- P. 4. Notes bibliographiques au bas des p.

Cote Dewey: 510.7/L963s Cote LC: QA/11

Descripteur(s): *Mathématiques *Didactique *Théorie de l'apprentissage *Primaire (Niveau)

Identificateur(s) de nom: *Piaget, Jean *Van Hiele, Pierre-M

Identificateur(s) de sujet: *Groupement (Concept) *Géométrie *Polyèdre *Objet spatial *Idée spatiale *Structuration

---

Rapport portant sur les manifestations et l'émergence de structurations intérieures d'objets géométriques, structurations qui se révèlent d'un intérêt particulier relativement à la genèse et au développement d'idées spatiales. La première partie traite des considérations théoriques auxquelles les expériences particulières retenues pour ce rapport font référence, notamment des concepts de Jean Piaget et de Pierre-M. van Hiele. La deuxième partie traite de l'expérience du comptage des faces de polyèdres dont il est question dans le rapport no 34, **Genèse et développement d'idées spatiales chez l'enfant et chez l'adulte**.

Les possibilités d'observation des activités mentales de l'individu, sans que celui-ci n'ait à les décrire verbalement, apparaissent comme le résultat le plus fascinant de cette recherche exploratoire. Les images mentales stimulées par l'activité du comptage de faces revêtent un caractère spatio-visuel et dynamique. De plus, des images mentales sont structurées par des opérations spatiales qui décomposent l'objet en parties constituantes et le recomposent en un tout organisé

Type de document: r
Région(s) administrative(s): 05
Notice(s) connexe(s): 8270375
Financement: Bénéficiaire - Université de Sherbrooke

Organisme(s) source(s) - MEQ-DGES
Programme(s) de subvention - FCAC
Auteur de l'analyse: jr

E D U Q 8270376

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Février 1982 Rapport No. 35

Structuration intérieure d'objets géométriques dans la genèse d'idées spatiales

par

Dieter Lunkenbein

Faculté des sciences Département de mathématiques

E D U Q 8270376

SECTION ENSEIGNEMENT

Le concept de groupement de Jean Piaget comme outil de la rationalisation des interventions didactiques.

Février 1982 Rapport No. 35

Structuration intérieure d'objets géométriques dans la genèse d'idées spatiales

par

Dieter Lunkenbein
Huguette Allard
Cécile Goupille

Assistants à la production: J. Roy et P. Al[illegible]

Projet de recherche subventionné
par le programme FCAC
du Ministère de l'Education du Québec

TABLE DES MATIERES

	PAGE
INTRODUCTION	
Chapitre premier: Considérations théoriques	5
1. Hypothèse de base	5
2. Quelques concepts théoriques de J. Piaget	6
3. Niveaux de pensée, structure et langage de Pierre-M. van Hiele	13
3.1 Niveaux de pensée en géométrie	14
3.2 La notion de structure	19
3.3 Le passage d'un niveau à l'autre	20
3.4 Apprentissage versus maturation biologique	21
4. Groupements et structures	22
4.1 Structures visuelles et groupements infra-logiques	22
4.2 Structures descriptives et groupements des classes d'une partition	24
4.3 Structures logiques et groupements logiques d'inclusion	27
4.4 Structures dans l'observation de situations concrètes d'apprentissage	29
4.5 La prédominance et l'importance de structures spatio-visuelles	33
Chapitre II: L'expérience du comptage des faces de polyèdres	37
1. Motivation et description de la tâche	37
2. Manifestations de l'absence et de l'existence de structurations intérieures	40
3. Description de structurations intérieures observées	42
3.1 Prisme pentagonal (P)	44

3.2 Antiprisme pentagonal (R) 46
3.3 Octaèdre régulier (S) 48
3.4 Pyramide carrée (E) 52
3.5 Icosaèdre régulier (U) 53
3.6 Parallélépipède (I) 58
3.7 Rhombi-cuboctaèdre (W) 61
3.8 Tableau synthèse des structurations 66
3.9 Commentaires relatifs aux structurations observées 70
4. L'émergence et le transfert de structurations intérieures 74
4.1 Les phénomènes de l'émergence 74
4.2 Transfert de structurations intérieures 75

Résumé et prospectives . 78

Introduction

Dans le cadre de nos travaux de recherche relatifs à la genèse et au développement d'idées spatiales (chez l'enfant et chez l'adulte) les quatre résultats qui suivent nous apparaissent comme les plus importants[1].

- Apparence globale d'objets géométriques
  Lors d'un premier contact avec des objets géométriques, l'individu (enfant ou adulte) reconnaît et identifie ces objets selon leur *apparence globale* et non pas d'après leurs composantes et leurs propriétés géométriques particulières.

- Reconnaissance graduelle de composantes et de propriétés
  La reconnaissance de composantes et de propriétés pertinentes pouvant servir à identifier et à décrire des objets géométriques semble être liée à un *processus d'apprentissage* ou d'acquisition d'expérience plutôt qu'à la maturation biologique comme telle de la personne.

- Variation dans la reconnaissance de propriétés
  Quoique tous les individus reconnaissent plus naturellement les dessins perspectifs (propriétés projectives) d'objets géométriques, les jeunes enfants semblent avoir plus de facilité à reconnaître les dessins topologiques (diagramme de SCHLEGEL) que les représentations développées (propriétés euclidiennes) de ces mêmes objets; chez les adultes cependant, nous avons

---

1. D. Lunkenbein, H. Allard, C. Goupille, Genèse et développement d'idées spatiales chez l'enfant et chez l'adulte, Rapport No. 34, Département de mathématiques, Faculté des sciences, Université de Sherbrooke, avril 1981.

observé le contraire: ils reconnaissent les représentations développées aussi facilement que les dessins perspectifs, mais ils refusent souvent d'accepter un diagramme de SCHLEGEL comme représentation graphique d'un objet géométrique.

- Structurations caractéristiques

Le point initial du processus de conception d'idées spatiales semble être caractérisé par les structures de nature *spatio-visuelle* plutôt que *logico-mathématique*. La reconnaissance d'objets géométriques, d'après leur apparence globale et l'identification de ceux-ci par voie d'association à des objets familiers peuvent avoir des effets inattendus:

- un même objet peut être perçu différemment selon les diverses positions dans lesquelles il est présenté;
- des objets géométriquement "parents" peuvent être perçus comme étant tout à fait étrangers les uns par rapport aux autres;
- des objets géométriques bien différents peuvent être perçus comme étant "parents" ou pareils.

L'association d'objets géométriques à des objets de même apparence, dans l'environnement de l'individu, engendre des *structures variées d'apparence* qui mettent en évidence tantôt des différences, tantôt des ressemblances par l'association à des objets de forme globale différente ou semblable. La reconnaissance de la *forme globale* d'un objet géométrique fournit une première propriété pertinente par laquelle un tel objet peut être décrit. Cette propriété, bien qu'encore floue et imprécise (forme ronde, forme pointue, forme avec creux, etc.) peut être précisée et détaillée par des activités appropriées.

Au cours de la précision de la forme globale d'objets géométriques, les *structurations intérieures* de ces objets semblent être d'une importance particulière. Par structuration intérieure d'objets géométriques, nous désignons la *décomposition* et la *recomposition* mentales de ces objets en/par leurs parties constituantes. Ainsi, l'individu se crée-t-il une *image mentale structurée* de l'objet comme un tout organisé en éléments constituants par des relations spatiales. Ces images mentales mettent en évidence les *composantes* des objets et font ressortir *les propriétés pertinentes* par le biais de relations spatiales entre les parties. Il semble que ces structurations intérieures puissent également être stimulées et guidées par des activités appropriées.

Relativement à la genèse et au développement d'idées spatiales, l'étude des *structurations intérieures* se révèle d'un intérêt particulier pour les trois raisons qui suivent:

- les structurations intérieures semblent être les germes d'organisation qui permettent à l'individu de progresser de la *perception globale* d'objets géométriques, due à l'apparence externe, vers la *conception* de ces objets comme *porteurs de propriétés*;
- les structurations intérieures ou les images mentales qui en résultent sont des exemples de *groupements infra-logiques*; le rôle qu'ils exercent, comme précurseurs de groupements logiques, n'est pas encore bien défini;
- les structurations intérieures peuvent également être considérées comme des manifestations de la *visualisation spatiale* à laquelle on attribue une

importance particulière dans le développement d'idées spatiales, sans pour autant pouvoir être en mesure de la décrire avec précision.

Nous avons donc étudié les manifestations et l'émergence de structurations intérieures d'objets géométriques par des expériences particulières dont ce rapport veut faire état. Ces expériences ainsi que les résultats qui en découlent, sont décrites et analysées en référence à un cadre théorique dû principalement à Piaget et à van Hiele. Nous en exposerons les idées fondamentales dans le premier chapitre. A cause du caractère visuel des observations et des résultats liés à ces expériences, ce rapport est accompagné d'un montage audiovisuel intitulé: "Comptage de faces et structuration intérieure de polyèdres".

Chapitre premier: Considérations théoriques

1. Hypothèse de base

Dans le cadre de la réflexion sur les origines de la connaissance de l'espace, on est amené à discuter les éléments de base sur lesquels la pensée géométrique est fondée. D'un point de vue historique, deux courants se dessinent nettement. L'un considère les *points* comme composantes fondamentales des objets géométriques et conçoit les lignes, les plans et les figures en général comme des classes de points. L'autre, au contraire, considère les *objets physiques*, les solides, comme éléments fondamentaux à partir desquels nous nous construisons, par idéalisation et par abstraction, les notions de point, de plan, de ligne, de forme et autres.

Ces deux courants ne nous apparaissent pas contradictoires, mais complémentaires. Tandis que le point de vue "*atomiste*" sert davantage les intentions et les besoins du mathématicien pour la reconstitution claire et cohérente des connaissances abstraites, le point de vue "*constructiviste*", qui veut que les idées spatiales émergent de nos expériences dans le monde réel, nous apparaît plus approprié dans le contexte des *conceptions initiales* que l'enfant doit se faire lors de ses premières explorations de l'espace. Lorsque nous nous intéressons surtout à ces conceptions initiales et à leurs développements immédiats, nous adoptons donc ce deuxième point de vue, qui est aussi en conformité, d'une part avec les résultats de la psychologie du développement et, d'autre part, avec ceux de l'épistémologie génétique de Piaget.

2. Quelques concepts théoriques de Jean Piaget[1]

Dans la conception piagétienne, les notions spatiales sont construites par l'*interaction* de l'individu avec son environnement réel. Dans cet environnement, l'individu *perçoit* les objets concrets et *agit* sur ceux-ci afin de s'en modeler des conceptions qui lui permettront de maîtriser de mieux en mieux la situation donnée ou de résoudre de plus en plus efficacement le problème posé.

Ainsi Piaget distingue [illegible] deux aspects de la connaissance spatiale: les asp[illegible]*ratif* et *opératoire*. Le rôle de l'aspect [illegible]ratif [illegible] fournir une imitation approximative [illegible] une copie de [illegible]alité. Dans ce contexte, interviennent les notio[illegible]'imitation, de perception et, en partie, de visualisation spatiale; cette dernière comportant une *composante active*, se place entre les aspects figuratif et opératoire. Le rôle de l'*aspect* opératoire est de transformer la réalité; ce caractère actif ou transformateur est spécifique de l'intelligence. Les modes opératoires élémentaires sont les *actions concrètes* qui s'intériorisent en *opérations mentales* qui, à leur tour, s'organisent en des "systèmes d'ensemble" appelés "groupements"[2].

Selon Piaget, deux sortes d'opérations apparaissent dans la pensée des enfants après l'âge de sept ans. Les *opérations logico-mathématiques* traitent d'éléments discrets, les discriminent, les réunissent en collections,

---

1. Ce résumé est tiré en grande partie de: Jacques Montangero, Recent Research on the Child's Conception of Space and Geometry in Geneva: Research Work on Spatial Concepts at the International Center for Genetic Epistemology, in Larry Martin, Space and geometry, ERIC' Columbus, Ohio, 1976.

2. Pour des descriptions plus détaillées de la notion de groupements voir: Loïc Thérien, Le concept de groupement dans l'élaboration de situations d'apprentissage en mathématique à l'élémentaire, La gazette des Sciences Mathématiques du Québec, III, 2, décembre 78, p. 17 à 51 ou Dieter Lunkenbein, Groupings in the Process of Concept Formation, FLM, 1,3, March 81.

les classifient et les mettent en relations diverses. Les *opérations spatiales* traitent d'objets continus, comme des figures spatiales ou l'espace entier; elles les décomposent en parties constituantes et les recomposent en un tout organisé.

Relativement à ces deux sortes d'opérations, Piaget distingue deux types de groupements: les *groupements logiques* et les *groupements infra-logiques*. Ces derniers sont les résultats d'*organisation* de *relations spatio-temporelles* et semblent précéder les groupements logiques: "Il est d'une importance fondamentale pour la psycho-genèse, qu'à partir de patrons (pattern) sensorimoteurs, le domaine infra-logique soit constitué en premier lieu. Les opérations et les relations logiques restent subordonnées longtemps à leurs homologues infra-logiques. Il leur faut un long processus de développement pour se libérer de cette dominance"[1].
Les groupements infra-logiques présentent donc pour la genèse d'idées spatiales, un intérêt particulier puisqu'ils tiennent plus particulièrement compte des relations spatiales et qu'ils semblent constituer la charnière entre la pure perception de l'environnement physique et l'aspect logico-mathématique de la connaissance.

A titre d'exemple, considérons un objet concret de forme icosaèdre. Une vision statique de cet objet nous fournira une perception qui s'apparente à son dessin perspectif.

Figure 1: Vision statique de l'objet

1. Erich Wittmann, Natural Numbers and Groupings, Ed. Stud. in Mathematics 6, 1975, page 59.

Certaines actions concrètes, comme par exemple celle de *tourner l'objet* autour d'un axe passant par deux sommets opposés, pourraient faire ressortir la vision du bloc comme étant composé de deux capuchons (de forme pyramide pentagonale) et d'une ceinture (de triangles).

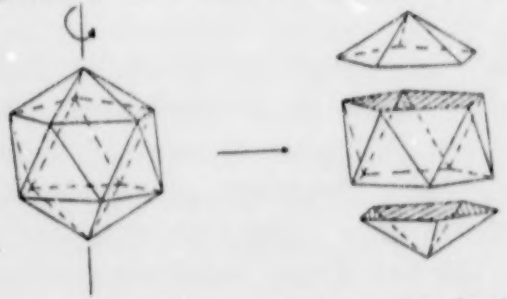


Figure 2: Structuration interne de l'objet (relations intrafigurales)

Ainsi, l'objet géométrique est-il *décomposé* mentalement en parties constituantes, qui, par la suite, peuvent être *recomposées* pour former l'objet initial entier. Pour l'individu qui a fait une telle expérience, ce bloc n'est donc plus un objet entier, saisissable uniquement par son apparence globale extérieure; il devient transformé, par ce que nous avons appelé une *structuration intérieure*, en une *image mentale* et *structurée* de nature *visuelle* et *spatiale* laquelle peut identifier les parties constituantes et les opérations spatiales qui relient ces parties de l'objet entier.

L'image mentale résultant de la structuration intérieure est un exemple d'un *groupement infra-logique*. Les parties (capuchons et ceinture) sont reliées par des opérations et des relations spatiales (troncature, position opposée, etc.) au tout de l'objet qui a ainsi été enrichi d'une structure visuelle. - A partir de la perception statique de l'objet, l'individu s'en est conçu une *vision spatiale* dynamique sur laquelle son *intuition spatiale* se fondera.

L'image mentale conçue met en évidence en premier lieu des *relations intrafigurales* en comparant les parties constituantes d'une figure singulière, sans référence à d'autres figures. Ces relations peuvent alors être à l'origine de la conception de propriétés particulières de cet objet géométrique (existence de parties identiques reliées par une partie intermédiaire, etc.). Mais ces images mentales peuvent aussi faire émerger des *relations interfigurales* comme par exemple le fait de concevoir l'icosaèdre comme composé de deux pyramides pentagonales et d'un antiprisme pentagonal.

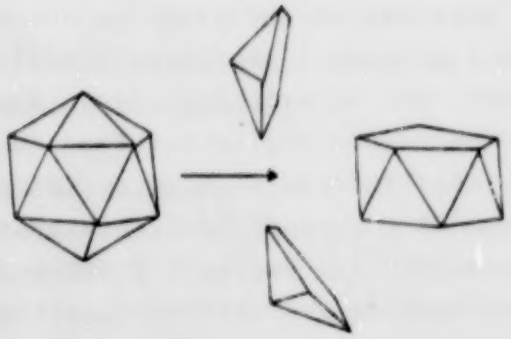


Figure 3: Genèse de relations interfigurales

Ainsi, l'icosaèdre est-il relié et comparé à d'autres polyèdres, ce qui favorise:

- la considération de relations et d'opérations logico-mathématiques;

- la reconnaissance de propriétés par comparaison avec d'autres objets distincts;

- la conception de structures extérieures à l'objet, c'est-à-dire de groupements logiques.

Une autre distinction qui ressort de la pensée de Piaget est celle qu'il fait entre les *pôles physique* et *logico-mathématique* de la connaissance. La connaissance physique (ou structures causales) est tirée, au moins partiellement, d'observations empiriques, par *abstraction simple*, dans le cadre des efforts que fait l'individu pour expliquer la réalité. Cette connaissance physique reflète les structures du monde réel extérieur telles les propriétés spatiales d'objets et les relations entre les variables physiques.

Cependant, la connaissance physique ne dérive pas uniquement de l'observation empirique du monde réel, mais elle implique également l'*abstraction réfléchissante*, qui, à son tour, est le principal mécanisme de construction de la connaissance logico-mathématique. Cette dernière est constituée de structures qui n'existent pas dans les objets du monde réel. En opposition avec l'*abstraction simple* qui consiste principalement en la prise de conscience de propriétés et de structures du monde réel, l'*abstraction réfléchissante* émerge de la réflexion de l'individu sur ses propres actions et sur leur organisation pour aboutir au réarrangement, à un autre niveau des éléments et des règles qui ont été abstraits préalablement. Selon la théorie de Jean Piaget, l'abstraction réfléchissante joue deux rôles importants:

- cette notion implique que l'on peut apprendre une chose, qui ne soit pas directement abstraite de la réalité extérieure; des propriétés d'objets, on dérive les lois auxquelles ces objets sont sujets ou auxquelles ils obéissent;

- l'idée d'une continuité dans le développement est, au moins partiellement, basée sur cette notion d'abstraction réfléchissante. En effet, à chaque niveau d'organisation, les lois, les structures, implicites au niveau qui lui précède immédiatement, sont explicitées et organisées dans de nouvelles structures.

C'est en ce sens que, dans une ligne de continuité, les concepts complexes de la science géométrique sont dérivés des notions spatiales élémentaires que peuvent se construire les jeunes enfants.

Piaget retient alors quatre traits pour caractériser la connaissance spatiale.

- La *visualisation spatiale* est une habileté mentale particulièrement appropriée à représenter les aspects spatiaux de la réalité. Cette habileté joue donc un rôle particulier dans l'acquisition de connaissances de l'espace et elle rend possible le développement de l'*intuition spatiale*.

- La connaissance de l'espace comporte à la fois des *pôles physique* et *logico-mathématique*. L'espace physique peut être su ou connu en partie par l'observation empirique qui comporte des aspects figuratifs et opératoire. Cependant, les concepts géométriques dépassent l'expérience empirique et figurent dans le domaine de l'activité déductive.

- Deux modalités peuvent être employées pour résoudre des problèmes spatiaux: *l'intuition spatiale* et la *géométrie déductive*. *L'intuition spatiale* ou géométrique rend l'individu capable de résoudre des

problèmes avant même de pouvoir appliquer une méthode systématique. L'intuition spatiale est décrite comme activité mentale liée à l'espace et basée essentiellement sur la visualisation (ou la représentation) spatiale qui, à son tour, est conçue en tant qu'*organisation dynamique* d'images mentales. L'intuition spatiale peut s'appliquer dans des formes plus ou moins développées, mais elle est l'outil fondamental de la pensée géométrique de l'individu qui ne dispose pas encore de méthodes systématiques ou déductives. La *géométrie déductive*, par contre, est décrite comme raisonnement séquentiel permettant des démonstrations et des découvertes par déduction.

- Deux types de relations spatiales peuvent être distinguées dans l'acquisition de la connaissance spatiale. Les relations *intrafigurales* comparent les éléments d'une seule figure sans référer à l'espace extérieur. Les relations *interfigurales*, qui comparent des figures distinctes, émergent plus tard dans le développement (entre 9 et 10 ans environ) et débouchent sur la construction de concepts spatiaux de nature logico-mathématique.

3. Niveaux de pensée, structure et langage de Pierre-M. van Hiele[1]

Tandis que l'approche piagétienne est de nature épistémologique, c'est-à-dire, qu'elle vise à étudier les origines et la nature de la connaissance de l'espace, les travaux de van Hiele comportent un aspect beaucoup plus didactique. Basé sur une riche expérience d'enseignement, ce dernier constata des différences essentielles entre le traitement de l'élève et celui du professeur relativement à une matière donnée. Il formula ces différences en des *niveaux de pensée* et affirma que "l'essentiel de la notion de *niveau de pensée* réside dans la constatation que, dans chaque discipline scientifique, il est possible de penser et de raisonner à différents niveaux et que ce raisonnement fait appel à des *langages différents*". Cette différence de raisonnement et de langage est due au fait que "la matière, telle que l'élève la rencontre, est d'une toute autre *structure* que celle qui est connue par le professeur". "Le professeur raisonne au moyen d'un réseau de relations que lui seul possède" et qui n'est pas à la base du raisonnement de l'élève.

- Dans ce qui suit, nous donnerons une description des trois premiers niveaux de pensée selon van Hiele tout en y indiquant les caractéristiques du langage

---

1. Ce compte rendu est tiré principalement de: P.-M. van Hiele, La pensée de l'enfant et la géométrie, Bulletin de l'APMEP, 1959, 198, 199-205, et Isack Wirzup, Breakthroughs in the Psychology of Learning and Teaching Geometry, in Larry Martin, Space and Geometry, ERIC/SMEAC, Columbus, Ohio, 1976, 75-97. Il se base également sur P.-M. van Hiele, La discussion et la langue, Conférence donnée à l'Université de Sherbrooke, avril 1981, ainsi que sur P.-M. van Hiele, Structure, Manuscrit inédit d'un livre.

approprié et de la structure sous-jacente à chacun de ces niveaux. Cette description se réfère plus particulièrement à la géométrie puisque c'est la discipline d'où originalement van Hiele formula les niveaux et puisque c'est elle qui nous intéresse plus particulièrement dans ce contexte.

3.1 Niveaux de pensée en géométrie

Au *premier niveau*, appelé aussi le *niveau visuel*, l'individu perçoit les objets géométriques *globalement* comme *entités* différentes liées à l'apparence externe sans identification des composantes et des propriétés.

Le langage de ce niveau est caractérisé par l'emploi spontané d'expressions très imagées et par l'association d'objets géométriques à des objets familiers de l'environnement (cabane d'oiseaux, tente, boule, etc.). Des termes géométriques sont mémorisés et associés à l'apparence extérieure des formes: "c'est un rectangle, parce qu'on le voit; c'est un cube parce que ... c'est un cube". Ce niveau est alors caractérisé par un *langage visuel* ou *perceptif*.

Les *structures* sous-jacentes à ce "raisonnement" et à ce langage sont hautement *visuelles*. L'association d'objets géométriques à des objets de l'environnement engendre des structures que nous appelons *structures d'apparence*.

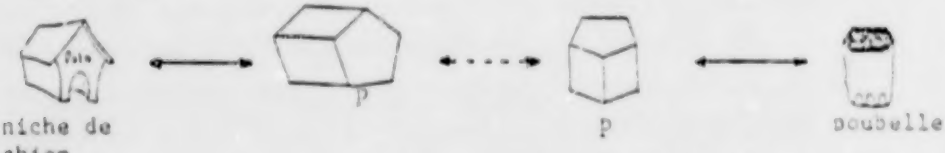


Figure 4: Structure d'apparence du bloc P

Ces structures manifestent plus fortement des associations de l'objet géométrique avec l'environnement qu'entre les différentes positions de l'objet. Elles témoignent que l'invariance de la forme n'est pas acquise. Si l'individu a peine à reconnaître un même objet parce que placé dans différentes positions, il associe encore plus difficilement des objets divers ayant des formes "parentes": le losange n'est pas reconnu en tant que parallélogramme; carré et rectangle sont des formes tout à fait distinctes. - Les structures visuelles sont également manifestées dans la découverte de régularités ou de parties d'un tout:

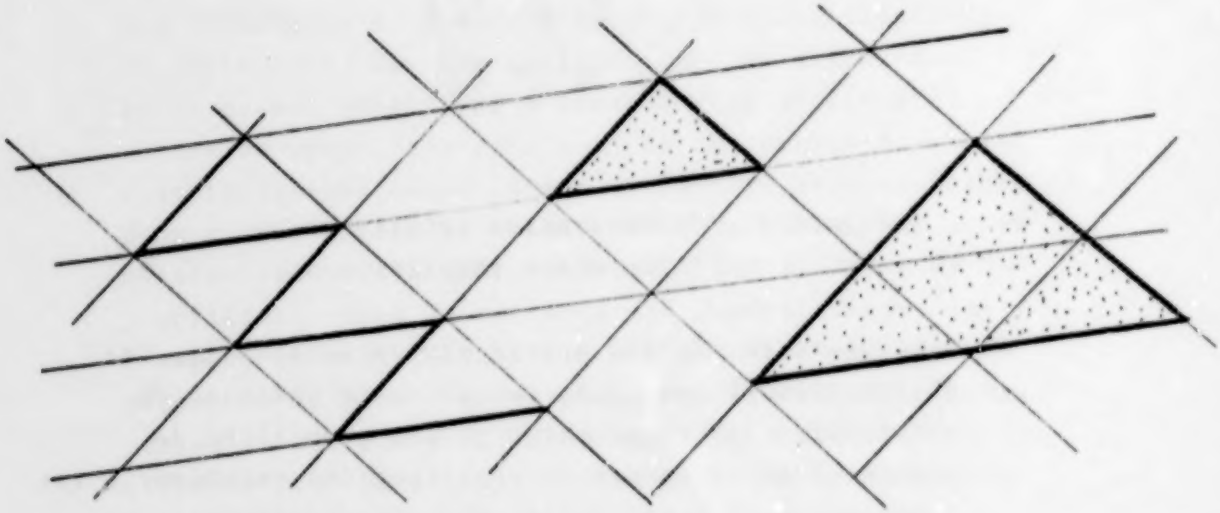


Figure 5: Structures visuelles

Dans cette structure de triangles, on peut voir diverses figures partielles comme "la scie" ou des triangles "semblables". Ces régularités sont vues et nommées mais pas encore décrites par des propriétés précises. Le besoin de descriptions, de définitions,

de justifications ne semble pas exister à ce niveau. Il suffit de voir, de nommer et de parler directement des choses observées. De telles observations peuvent également faire émerger, par exemple, la vision d'un icosaèdre régulier comme agencement d'une multitude de "capuchons" pyramidaux, ce qui serait le résultat d'une *structuration intérieure* de cet objet géométrique.

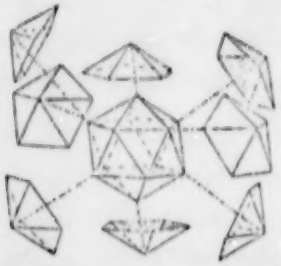


Figure 6: Structuration intérieure de l'icosaèdre régulier

A un *deuxième niveau*, appelé *niveau descriptif*, les objets géométriques sont conçus comme *porteurs de propriétés*; les composantes et les propriétés de l'objet sont reconnues et décrites; des relations entre composantes et entre différents objets géométriques sont établies.

Le *langage descriptif* de ce niveau fait donc appel aux composantes et propriétés que l'individu a constatées. Par exemple: "Cette figure est un losange parce qu'elle a quatre côtés égaux". Cependant des relations logiques entre les diverses descriptions ne sont pas encore établies: "le carré n'est pas un losange parce qu'il

a quatre angles droits". A ce deuxième niveau, l'individu peut parler de la nature des structures du premier niveau: qu'est-ce qui fait qu'on a appelé une figure une "scie"? "Comment peut-on reconnaître que deux triangles sont semblables"? Qu'est-ce qu'on entend par "capuchons" et "comment sont-ils agencés pour engendrer la forme entière"? Les observations, les visualisations, les inventions de noms, les discussions du premier niveau ont créé un langage et une familiarité suffisante avec les choses pour motiver et rendre accessibles des précisions au niveau de la description.

Les *structures* de ce niveau *descriptif* semblent être des structures de discrimination, de classification, de sériation. Les ressemblances et les différences entre objets géométriques peuvent être décrites en termes de propriétés précises, ce qui permet alors les classifications selon la même propriété reconnaissable dans divers objets et selon les différenciations entre objets, lesquelles sont basées sur les différences de propriétés. Dans le contexte des quadrilatères, par exemple, on peut reconnaître que le carré possède une propriété de plus que le losange ou le rectangle; mais puisqu'il est classifié dans une classe différente, le carré ne peut être considéré en tant que rectangle ou losange particulier. Les structures descriptives de ce niveau permettent à l'individu d'agir de façon systématique à partir de descriptions précises de phénomènes spatiaux et d'accumuler ainsi un meilleur bagage de connaissances par l'expérimentation et la modélisation.

Le *troisième niveau* peut être appelé le *niveau logique*[1]. Ce niveau est caractérisé par l'*émergence de relations logiques* entre les propriétés d'une figure ou de classes de figures. L'interdépendance logique de propriétés est reconnue; des démonstrations et des déductions simples deviennent possibles et le rôle de la définition est clarifié. Ce niveau marque alors le début de la *construction dite théorique* par l'établissement de déductions et de théories locales.

Le *langage de ce niveau* est davantage marqué par des arguments logiques. Le carré est reconnu en tant que losange, parce qu'il est, par définition, un losange particulier. Les descriptions parfois redondantes peuvent être transformées en définitions minimales desquelles on peut déduire d'autres propriétés implicites. Les expériences peuvent être distinguées des déductions dont on peut davantage saisir la valeur.

Ce langage est alors l'expression de l'existence de *structures logiques*. Pour définir ce qu'est un carré, il faut *d'abord* l'identifier en tant que quadrilatère; ce quadrilatère peut *ensuite* être précisé en tant que parallélogramme qui *finalement* se distingue *à la fois* par quatre côtés égaux et quatre angles droits. De telles structures indiquent des catégories et des sous-catégories d'objets géométriques (abstraits) reliées entre elles par des relations d'inclusion.

Van Hiele indique encore deux autres niveaux de pensée que nous négligeons ici, car l'auteur même, considère les trois premiers comme les plus importants et parce que, dans le contexte de ce rapport, les niveaux quatre et cinq ne seront d'aucune pertinence.

---

1. Il apparaît que van Hiele conçoit aujourd'hui ce niveau de façon plus exigente quand il l'appelle niveau théorique. Nous nous tenons, dans ce résumé, aux descriptions de l'article original.

3.2 La notion de structure

Selon van Hiele, l'existence de structures est un phénomène important: la structure (le patron, la régularité) rend l'homme et l'animal capable d'agir de façon cohérente, même dans des situations qu'il n'a pas encore rencontrées. La formation de patrons protège l'homme et l'animal de périodes infinies d'essais et d'erreurs. La notion de structure chez van Hiele est conçue de façon très large et est caractérisée par quatre propriétés.

- Une structure peut être *élargie* (pas nécessairement de façon unique et non nécessairement de façon indéfinie); *l'extension de la structure* est sujette aux mêmes règles que la partie originale donnée.

- Une structure peut être vue comme *partie d'une structure plus globale*; elle peut y apparaître comme sous-structure particulière.

- Une structure peut être *raffinée* par l'indication de plus de détails.

- Des structures peuvent être *comparées* par morphismes et, en particulier, par isomorphismes.

De telles structures peuvent être essentiellement différentes de caractère, ce qui situe la pensée à un niveau donné et ce qui s'exprime par un langage approprié. Ainsi les *structures visuelles*, qui s'expriment le plus facilement par des images, indiquent-elles des activités d'observation et la reconnaissance de régularités visuelles. Il n'est pas nécessaire d'utiliser

un langage verbal pour réagir à ces structures; des actions et des gestes sont souvent les premières manifestations de leur existence. Le langage verbal est alors ajouté par la désignation de mots pour identifier des parties de la structure, ce qui accroît la puissance de manifestation de la structure. - Les *structures descriptives* du deuxième niveau, qui s'expriment en des classifications (partitions) ou des comparaisons de propriétés, indiquent une pensée descriptive expliquant des relations causales (ou autres) incluses dans les structures visuelles observées. L'émergence de telles structures va de pair avec la création d'un langage descriptif et explicatif. - Les *structures logiques* du troisième niveau qui s'expriment en des *chaînes de raisonnements successifs* ou en termes d'implications logiques, indiquent l'émergence d'une pensée logique explicitant les relations logiques incluses dans les structures descriptives. Ainsi, cette pensée concerne encore une fois la nature des structures du niveau précédent. Le langage logique de ce niveau est de caractère plus abstrait car il a trait aux relations dans une structure qui n'est pas visuelle.

3.3 Le passage d'un niveau à l'autre

Puisque le passage d'un niveau à l'autre implique un changement dans le caractère des structures et du langage, les structures d'un niveau donné doivent être suffisamment familières et étoffées avant que les structures subséquentes ne deviennent "*pensables*". Ce passage est alors favorisé par des activités de familiarisation et d'enrichissement dans le but de rendre explicite ce qui est implicite au niveau précédent. Ces activités sont décrites par van Hiele

en termes de cinq phases; elles passent de la *reconnaissance* du champ d'étude à travers des *explorations* à *l'explication* de phénomènes et à la création d'un *langage* approprié; l'acquisition d'une *mobilité* dans ce champ favorise alors la construction d'un *aperçu global* qui, à son tour, rend l'individu capable de concevoir les structures du niveau suivant.

3.4 Apprentissage versus maturation biologique

La progression d'un niveau à l'autre est, d'après van Hiele, due principalement à un processus d'apprentissage et non à une maturation biologique comme Piaget la conçoit à travers des stades. Cela signifie que l'accélération du passage est possible et désirable, pourvu qu'elle soit le résultat d'expériences appropriées d'apprentissage. Mais ce fait signifie également que des individus adultes peuvent être au même niveau que des enfants et encore, qu'un même individu peut être à des niveaux différents dans différents champs d'étude. De multiples expériences d'enseignement semblent vérifier cette conception.

4. Groupements et structures

Dans les deux approches, la conception de structures joue un rôle central. Les structures de van Hiele (réseaux de relations, patrons, régularités, gestalts, etc.) sont conçues de façon très large et basées sur la théorie de la gestalt. La notion piagétienne de groupement a stimulé une multitude de travaux de précision et de formalisation et elle a été formulée de façon précise et très large par E. WITTMANN[1] en termes de catégories. Cette formalisation a été instrumentale dans la collection d'exemples de groupements dans des contextes et à des niveaux très diversifiés. L'exploration de ces exemples redonne à cette notion un aspect très dynamique et flexible qui n'est pas facile à exprimer dans une définition formelle. Ainsi, la notion de groupement présente-t-elle maintenant un instrument précis et flexible permettant de décrire des images mentales structurales que l'on retrouve ou bien dans d'autres approches théoriques ou bien dans l'observation de situations concrètes d'apprentissage.

Dans ce contexte, il est intéressant de remarquer que les structures correspondantes aux trois premiers niveaux de van Hiele peuvent être caractérisées en termes de groupements.

4.1 Structures visuelles et groupements infra-logiques

Les structures visuelles du premier niveau de van Hiele manifestent une parenté marquée avec les groupements infra-logiques. Dans les deux cas, on identifie des parties d'un tout et on relie ces parties par des relations spatio-temporelles pour en recomposer le tout.

---

1. E. Wittmann, Natural Numbers and groupings, Ed. Studies in Mathematics 6 (1975), 53-75.

Par exemple, dans la structure visuelle que représente une feuille de papier quadrillée, on peut évidemment identifier les carrés en tant que parties, qui sont alors agencés de façon particulière pour composer le tout du quadrillé. Mais on peut également y identifier d'autres parties contenues dans cette structure globale:

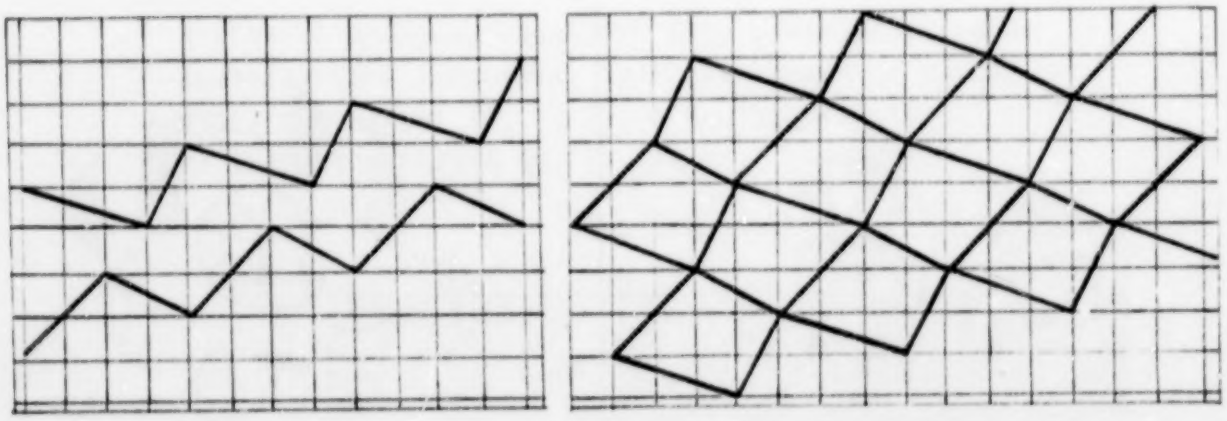


Figure 7: Structures visuelles du quadrillé

Les "scies" identifiées en première image peuvent être composées pour former la structure visuelle du deuxième dessin également contenue dans la structure originale.

Cette structure peut également être conçue comme composée de "chiens".

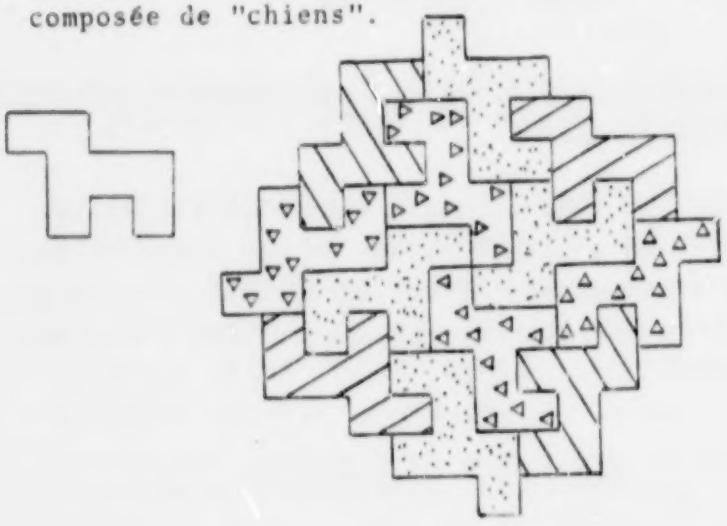


Figure 8: Patron de "chiens"

Dans le contexte tri-dimensionnel, les structures visuelles ou infra-logiques se manifestent de façon suivante:

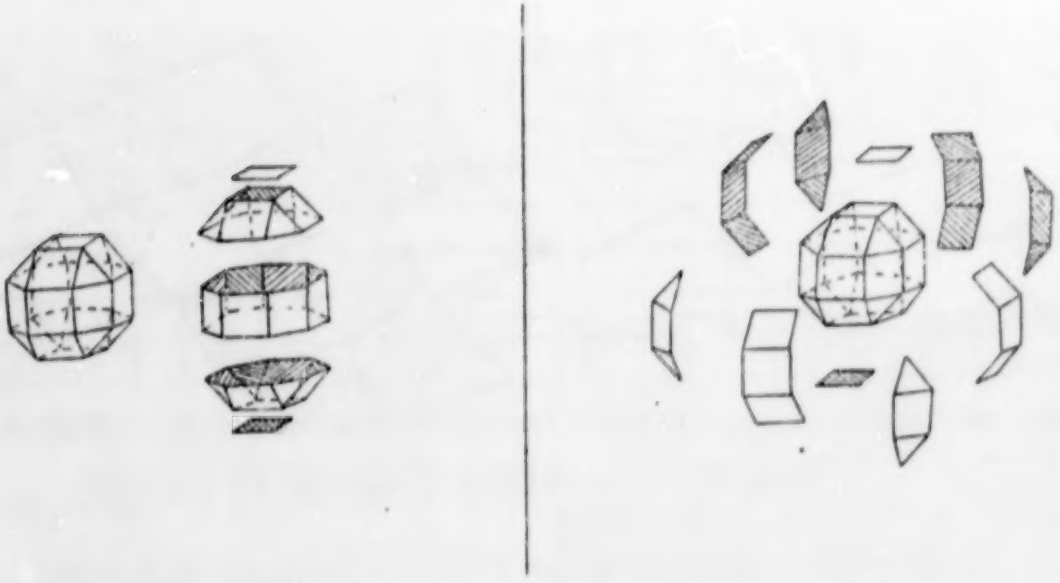


Figure 9: Structurations intérieures du rhombi-cuboctaèdre

4.2 Structures descriptives et groupements des classes d'une partition

Nous faisons un rapprochement entre les structures descriptives du deuxième niveau de van Hiele et les *groupements des classes d'une partition*[1]. Ces groupements sont le résultat de classifications selon des

1. D. Lunkenbein, Groupement de treillis, Rapport No. 19, Université de Sherbrooke, Département de mathématiques, novembre 1977, page 65.

propriétés précises et hiérarchisent des classes d'après le nombre de propriétés. Ce groupement n'a pas été décrit explicitement par Piaget, mais, il semble être un précurseur du groupement qu'il appelle celui de "l'emboîtement hiérarchique des classes".

A titre d'exemple, considérons la classification de quadrilatères (convexes) selon le nombre de paires de côtés parallèles (0, 1, 2), l'équiangularité (0, 1) et l'équilatéralité (0, 1).

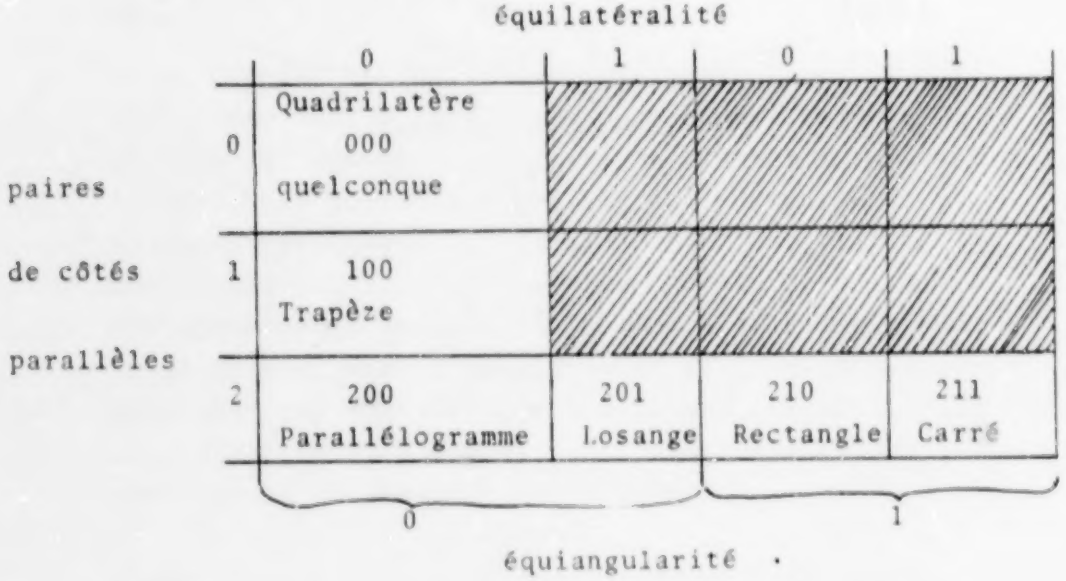


Figure 10: Classification de quadrilatères

Par la superposition de ces trois critères de classification, on obtient six classes de quadrilatères que l'on peut symboliser par des triplets de nombres. Habituellement, ces six classes de quadrilatères sont appelées: quadrilatère quelconque, trapèze, parallélogramme, losange, rectangle et carré. Si, par la suite,

on hiérarchise ces classes selon le nombre de propriétés qu'elles possèdent (ce qui pourrait signifier un degré de perfection), on obtient alors l'image structurée suivante:

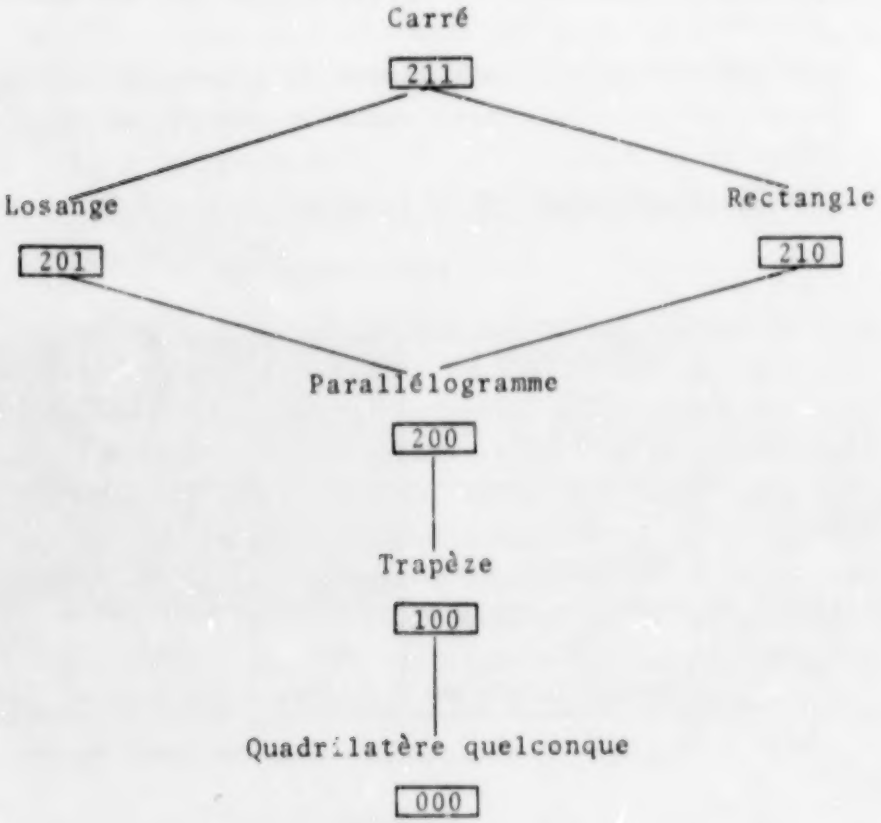


Figure 11: Groupement de classes de quadrilatères

Dans cette hiérarchisation de classes, on reconnaît facilement que le rectangle possède une propriété de plus que le parallélogramme ou, que le carré a plus de propriétés que le losange; mais, d'après une telle structure, le carré n'est pas un losange parce qu'il a la propriété d'équiangularité de plus et appartient,

pour cela, à une autre classe ne pouvant être confondue avec celle des losanges. Ce raisonnement correspond parfaitement à celui indiqué par van Hiele pour le deuxième niveau de pensée et que l'on peut observer très souvent dans la pratique de l'enseignement, surtout au moment où l'on tente de faire accéder les élèves à une conception inclusive des différents types de quadrilatères.

4.3 Structures logiques et groupements logiques d'inclusion[1]

La conception inclusive des différents types de quadrilatères semble être basée sur l'établissement de structures logiques d'inclusion d'ensembles qui établissent des liens logiques entre les propriétés des éléments regroupés. C'est ainsi que nous relions les structures logiques du troisième niveau de van Hiele aux groupements logiques d'inclusion de Piaget, dont la formation, dans l'enseignement de la mathématique, ne semble pas émerger sans une longue préparation et sans devoir être précédée par l'établissement de groupements de classes.

Comme exemple d'un groupement logique d'inclusion, replaçons-nous encore une fois dans le contexte des quadrilatères. Dans cet univers Q, nous retenons l'ensemble de tous les représentants qui possèdent au moins une paire de côtés parallèles et nous les appelons les trapèzes T. Si, par la suite, nous concevons les parallélogrammes P en tant que quadrilatères possédant (au moins) deux paires de côtés parallèles, alors il est évident que ceux-ci se retrouveront dans la collection des trapèzes, car la

---

1. Piaget appelle ces groupements des "emboîtements hiérarchiques de classes".

propriété d'avoir deux paires de côtés parallèles implique qu'il faut en avoir au moins une paire. Les losanges L conçus en tant que quadrilatères équilatéraux se retrouvent ensuite dans la collection des parallélogrammes et on ne peut en trouver qui ne sont pas des parallélogrammes. Ceci semble indiquer que la propriété d'équilatéralité implique celle d'être parallélogramme, ce qui motive, à son tour, la réflexion relative à la possibilité d'en établir une preuve rigoureuse. Il en est de même pour la propriété d'équiangularité qui définit les rectangles R . Les carrés C finalement émergent en tant qu'intersection des collections de losanges et de rectangles, ce qui les rend évidemment rectangles et losanges. - Le schéma de cette structuration ressemble beaucoup à celui des groupements des classes,

Figure 12: Groupement logique d'inclusion de types de quadrilatères

mais le sens à donner aux états et aux opérations (inclusion) est tout autre. Il en est de même pour le type (lé niveau) de pensée qui correspond de toute évidence à celui du troisième niveau de van Hiele. Maintenant le carré est aussi naturellement conçu comme losange qu'il en était différencié au niveau précédent, c'est-à-dire dans la structure du groupement de classes.

Le rapprochement entre les conceptions de Piaget et de van Hiele pourra s'avérer enrichissant dans l'un et l'autre cas. En effet, par la notion de groupement, la notion de structure, chez van Hiele, risque de pouvoir être formulée de façon plus précise et plus indicative pour les divers niveaux. A l'opposé, la notion de groupement est enrichie par les caractéristiques de pensée et par le rôle du langage aux divers niveaux de van Hiele, ce qui pourra faciliter l'identification de groupements dans l'observation de situations concrètes d'apprentissage et ce qui fournira possiblement des critères plus fins pour la classification de groupements.

4.4 Structures dans l'observation de situations concrètes d'apprentissage

Voici un exemple qui montre comment l'identification de groupements ou de la formation de groupements dans des situations concrètes d'apprentissage est facilitée, si l'on tient compte des façons de penser et de parler des individus:

> Dans une expérience conçue pour l'observation de la formation de groupements, des individus de

> divers groupes d'âge de l'école primaire ont été confrontés avec le problème de construire des tours à cinq étages à partir d'un approvisionnement suffisant de cubes emboîtables de deux couleurs différentes (vert et blanc); toutes les tours construites devaient être différentes et il fallait en construire autant que possible[1].

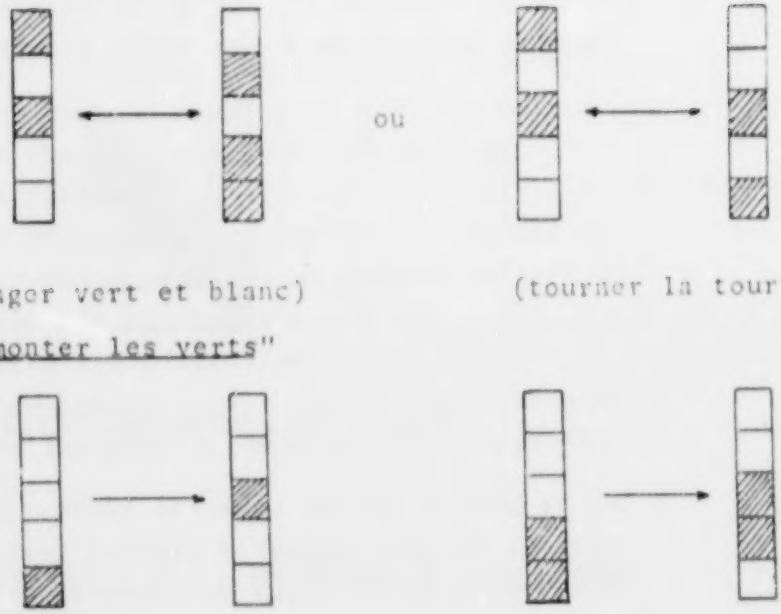
Cette situation est une concrétisation du problème qui consiste à trouver le nombre d'arrangements de deux éléments pris cinq à la fois (2^5). Insérer dans un cadre référentiel (structure) de la combinatoire, elle peut être traitée à un niveau général et mathématique, ce qui représenterait alors un traitement au niveau logique. - La situation pourrait également être abordée, à un niveau descriptif, en discriminant, en décrivant, en classifiant et en expliquant les diverses tours que l'on peut construire: tours à différents nombres de cubes verts, l'identité des tours à 2 verts et des tours à (5-2) blancs, autant de tours à 1 vert et à 1 blanc, etc.. Mais la totalité des enfants et la grande majorité des adultes soumis à cette épreuve ont traité la situation à un niveau visuel pour en concevoir, au moins fragmentairement, des groupements infra-logiques. Voici quelques indications à ce sujet:

- les actions ou opérations pour construire ou relier des tours étaient essentiellement de nature visuelle spatiale, telles que:

---

1. Cette expérience est décrite dans:
D. Lunkenbein, Formation de groupements, Rapport No. 24, Université de Sherbrooke, Département de mathématiques, hiver 1980.

"faire le contraire"



(interchanger vert et blanc) (tourner la tour)

et "monter les verts"

Figure 13: Opérations de nature spatio-visuelle

- après avoir construit plusieurs tours à un vert ou à un blanc, certains individus les plaçaient en ordre de la façon suivante:

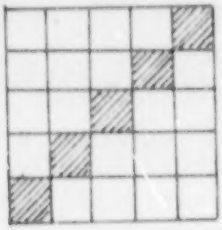


Figure 14: Structure visuelle

La complétude de cette collection de tours était alors justifiée par l'expression "parce que ça monte", "ça forme un escalier". Une telle structure se trouve parfois transférée à des tours à deux verts:

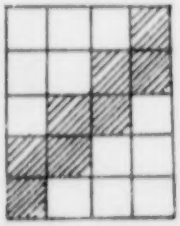


Figure 15: Structure visuelle

et ne permet pas de comparer toutes les tours à deux verts. Un seul enfant a ordonné toutes les tours à deux verts de la façon suivante sans pouvoir en exprimer le critère.

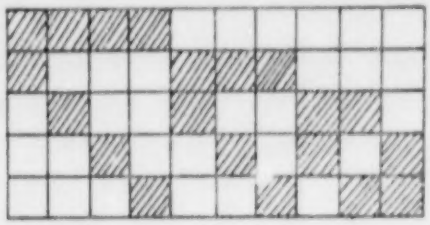


Figure 16: Structure visuelle

Ces structures visuelles sont conçues parfois temporairement et peuvent disparaître sans raison évidente. Elles se manifestent, dans la plupart des cas, par des actions (cohérentes) ou des gestes plutôt que par des explications verbales: une jeune fille de 7 ans procédant de façon systématique en appliquant les

deux opérations: "faire le contraire", répond de façon laconique lorsqu'on lui demande comment elle fait pour trouver d'autres tours: "sais pas!".

La nature spatio-visuelle des fragments de structures et le rôle que joue le langage en tant qu'indicateur de phénomènes observés révèlent que les activités du sujet sont au premier niveau selon van Hiele. A ce niveau, l'individu ne peut pas encore penser en termes de classification ou de description précise (c'est-à-dire de façon appropriée au deuxième niveau). Cela, nous l'avons constaté par l'expérimentation d'une intervention didactique conçue pour stimuler des activités de classification laquelle a connu peu de succès chez les élèves[1].

4.5 La prédominance et l'importance de structures spatio-visuelles

Dans de nombreuses expériences relatives à l'enseignement de formes géométriques par lesquelles nous visions la discrimination et la classification d'objets géométriques concrets, nous avons observé, chez les individus, une préférence marquée pour les activités basées sur des structurations visuelles de même qu'une habileté accrue et inattendue dans des situations faisant appel à l'imagination ou à la créativité visuelle. Cette prédominance d'aspects spatio-visuels se manifeste entre autres:

- dans le désir des individus de composer, décomposer et recomposer des figures ou des formes globales

1. Suzette Lecomte, Une expérimentation de la formation de groupement et de l'effet d'une intervention didactique sur ce processus de formation, Mémoire de maîtrise, Université de Sherbrooke, mai 1981.

à partir de parties constituantes;

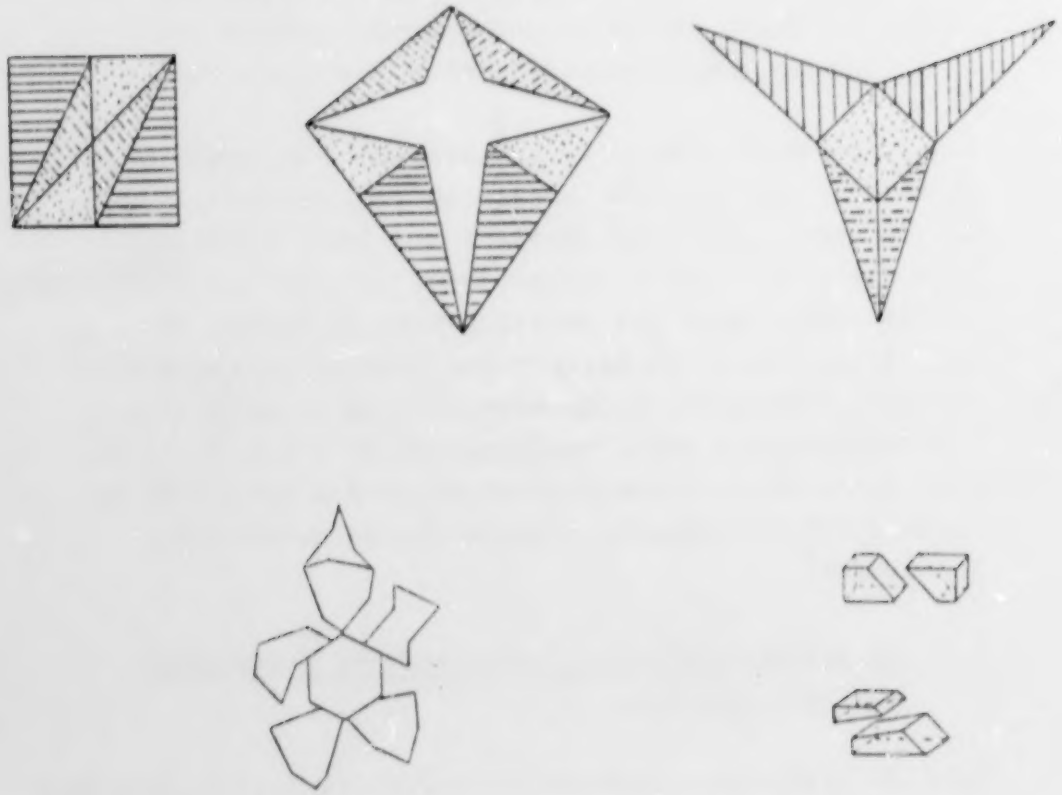


Figure 17: Composition, décomposition et recomposition de formes et de figures

- dans l'usage d'un langage hautement intuitif qui désigne des phénomènes visuels par l'association à des observations ou à des objets de l'environnement;

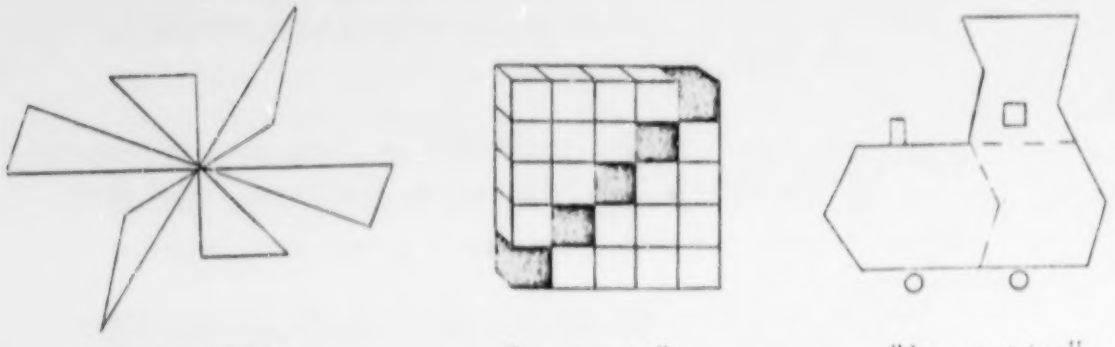


Figure 18: Structures visuelles - langage visuel

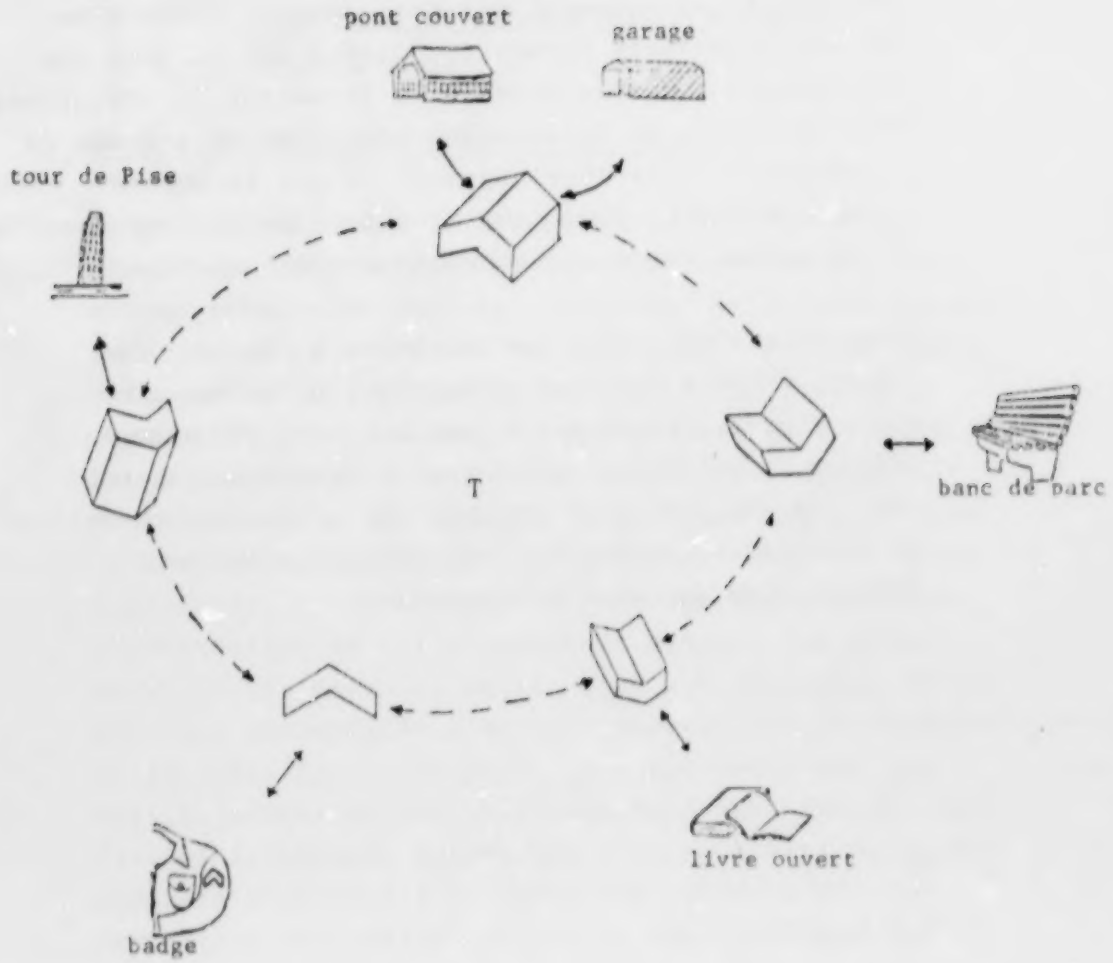


Figure 19: Structure d'apparence du bloc T

La résistance, pour des individus qui en sont à un premier contact avec des objets géométriques, à accéder à des activités de discrimination ou de classification, semble indiquer, d'après les affirmations de van Hiele, que ceux-ci, enfants ou adultes, ne sont pas prêts à opérer mentalement dans de tels schèmes; cela probablement à cause de leur manque de

familiarité avec les objets considérés. C'est ainsi que ces structures visuelles se révèlent en tant que précurseurs indispensables à la formation de structures descriptives. La description plus fine et l'étude de l'émergence et du développement de ces structures (visuelles) sont donc cruciales pour notre compréhension de la genèse et de la formation d'idées spatiales.

Nous avons donc conçu une expérience particulière visant à identifier des phénomènes de présence ou d'absence de structures visuelles dans une situation précise. Par cette expérience nous avons également tenté de décrire plus finement de telles structurations et ainsi mieux connaître les phénomènes de leur émergence et de leur développement.

Chapitre II: L'expérience du comptage des faces de polyèdres

1. Motivation et description de la tâche

Selon les résultats de l'expérience précédente[1], l'activité du comptage des faces de polyèdres s'est avérée stimulante pour la conception de structurations intérieures de polyèdres par les individus. En effet, cette activité implique le recours à une *procédure appropriée* qui permette de *systématiser le comptage*. Et, l'imagination d'une telle procédure nécessite, de la part de l'individu, la création d'une partition de l'ensemble des faces du polyèdre retenu en classes disjointes, c'est-à-dire, la présence mentale d'une *structuration* de cet ensemble de manière que l'énumération des éléments puisse être non seulement possible mais accompagnée d'un raisonnement qui la traduise et la justifie. - De plus, il s'est avéré que les manifestations de ces structurations sont relativement faciles à observer pourvu que l'on soit muni de moyens adéquats d'observation (protocole audiovisuel) qui permettent une analyse détaillée des réactions des individus. Ces moyens d'observation nous révèlent non seulement l'existence ou l'absence de telles structurations, mais nous permettent encore de les décrire de façon précise et possiblement, d'en observer l'émergence, voire le développement.

Nous avons donc repris cette expérience du comptage de faces, mais de façon clinique en fixant sur bandes magnétoscopiques les actions et réactions des individus, de même que

---

1. D. Lunkenbein, H. Allard, C. Coupille, Genèse et développement d'idées spatiales chez l'enfant et chez l'adulte, Rapport No. 34, Département de mathématiques, Université de Sherbrooke, avril 1981, page 67.

leurs expressions verbales. Successivement et dans l'ordre, les sept polyèdres ci-contre ont été présentés aux candidats pour qu'ils en comptent les faces.

Douze enfants d'une 6e année (11 et 12 ans) et 12 adultes futurs-maîtres (19 à 21 ans) ont participé à l'expérience. Parmi les enfants, on retrouve, en nombre égal, des filles et des garçons dans les catégories forts, moyens et faibles (selon le dossier scolaire). Le groupe d'adultes par contre, se compose uniquement d'étudiantes en cours de formation de maîtres; celles-ci s'étant volontairement soumises à l'expérience.

Après s'être assuré que chaque candidat comprenait bien ce que l'on désignait par une "face" dans un polyèdre, on procédait à l'exercice suivant:

Compte à haute voix les faces de ce polyèdre en indiquant (avec ton doigt) comment tu procèdes pour le faire.

Par cette expérience, nous avons tenté de répondre aux questions suivantes:

- Comment peut-on observer et décrire les manifestations d'existence et d'absence de structurations intérieures dans le contexte du comptage des faces?

- Pour les divers polyèdres considérés, peut-on identifier des structurations intérieures précises qui ressortent de cette activité?

- Peut-on indiquer des phénomènes décrivant l'émergence graduelle de telles structurations?

Dans ce qui suit, nous tenterons de répondre à ces questions selon les résultats de cette expérience. Ces réponses sont davantage illustrées dans le montage audiovisuel qui accompagne ce rapport et qui est constitué d'extraits de bandes prises lors de cette expérience.

2. Manifestations de l'absence et de l'existence de structurations intérieures

L'*absence* de structurations intérieures ou la confusion de structurations fragmentaires est manifeste dans un comptage aléatoire et inordonnée. Il arrive aussi souvent à l'individu d'oublier de compter des faces que de compter la même face plusieurs fois durant son calcul. Et si, pour vérification, il reprend plus d'une fois le comptage d'un même bloc, il ne procède pas nécessairement de la même façon chaque fois. Aussi, le rythme de comptage est-il lent, hésitant et peu rassuré. La séquence des mots de nombres ne laisse reconnaître aucune régularité et le résultat du comptage est souvent faux et énoncé avec peu de conviction. Aux questions "es-tu sûre de ton résultat?" ou "pourquoi?", l'individu répond de façon négative ou par une reprise du comptage sans justification.

Ces phénomènes d'un comptage aléatoire et inordonné ne sont pas nécessairement dûs à l'absence pure et simple de structurations intérieures, mais ils peuvent être justifiés aussi par:

- la *non conservation* d'une structuration durant le processus de comptage; une structuration est si peu stable qu'elle est perdue au cours de la manipulation de l'objet;

- l'*inadéquation* d'une structuration au processus du comptage; les structurations n'entraînant pas une partition de l'ensemble des faces ne facilitent pas nécessairement l'évaluation de leur nombre par le comptage;

- la *confusion* de structurations fragmentaires; on peut observer que la présence simultanée de différentes structurations fragmentaires empêche l'individu d'en compléter une.

Ces observations sont déjà des indices relatifs à l'émergence de structurations et nous y reviendrons plus tard. Elles nous incitent, cependant, à ne pas interpréter les phénomènes du comptage aléatoire catégoriquement en tant qu'absence de structurations intérieures.

L'*existence* de structurations intérieures de polyèdres se manifeste par l'application systématique d'une procédure de comptage. L'individu compte de façon cohérente, chaque face une et une seule fois. La façon de compter les faces peut être reproduite au besoin et le rythme du comptage est régulier et sans hésitation. La séquence des mots de nombres fait reconnaître des regroupements de faces qui correspondent aux gestes qui les affirment. Le résultat du comptage est énoncé avec conviction (tout en étant correct, dans la plupart des cas) et peut être justifié par une reprise de la même procédure ou par des explications indiquant la structuration mentale en termes de gestes et d'expressions verbales.

De plus, ces manifestations d'un comptage systématique permettent d'identifier des structurations intérieures précises dont les individus se sont servis pour s'acquitter de la tâche donnée.

3. Description de structurations intérieures observées

Dans cette section, nous décrirons, pour chacun des blocs polyèdres expérimentés, les structurations intérieures que nous avons pu observer explicitement dans le cadre de cette expérience. Nous en indiquerons aussi quelques-unes dont nous croyons avoir vu des fragments et que nous avons complétées d'après nos interprétations. Nous nous servirons principalement de moyens visuels (dessins) pour décrire ces structurations et nous utiliserons, dans la mesure du possible, les expressions des individus afin de mieux faire saisir leur vision.

Les polyèdres présentés aux candidats au cours de cette expérimentation n'ont pas révélé une égale variété de conceptions au niveau de leurs structurations. Par exemple, alors que, pour le prisme pentagonal (P), nous n'avons pu observer que deux différentes structurations, le rhombi-cuboctaèdre (W) en a stimulé cinq, selon nos observations.

Si un même polyèdre peut être perçu de différentes façons selon les candidats qui l'observent, il va sans dire que la fréquence de reconnaissance et d'utilisation peut varier d'un type de structuration à un autre pour un même polyèdre. Sans vouloir élaborer une analyse comparative poussée de la fréquence de traitement des diverses structurations concevables pour un polyèdre donné, nous avons tout de même tenu à indiquer, par un tableau, en regard de chaque développement structural proposé, le nombre de candidats (adultes ou enfants) qui ont fait appel

à ce type précis d'organisation, distinguant du même coup les utilisations achevées des utilisations fragmentaires. Nous avons consigné sous l'item "utilisation achevée" le nombre des candidats qui ont utilisé de façon non équivoque une telle structuration pour s'acquitter de la tâche proposée. Par contre, ceux des candidats qui ont fait appel à une structuration donnée, mais sans la maîtriser suffisamment (manque de liens spatiaux entre les parties constituantes, manifestation partielle de la structure, etc.) figurent sous la dénomination "utilisation fragmentaire".

Comme un même candidat fait fréquemment appel à plus d'un type de structurations en comptant les faces d'un même polyèdre, il s'ensuit que, pour un bloc donné, la somme des fréquences en termes d'utilisations achevées ou d'utilisations fragmentaires dépasse le nombre de candidats soumis à l'expérimentation.

Il demeure que, même si cette catégorisation peut sembler grossière et peu sélective, pour le lecteur, elle n'est pas pour autant à l'abri de toute interprétation subjective de la part de l'expérimentateur ou de l'analyste-chercheur. Il s'avère également impossible, même à l'oeil le plus objectif et avisé, de dépister toutes les manifestations ou traces de structurations intérieures chez celui que l'on observe.

3.1 Prisme pentagonal P

3.1.1 a) Décomposition et recomposition:

- ceinture de carrés, de rectangles, ou de parallélogrammes;
- deux "couvercles" (faces opposées parallèles)

b) Comptage de faces: $5 + 2 = 2 + 5 = 7$

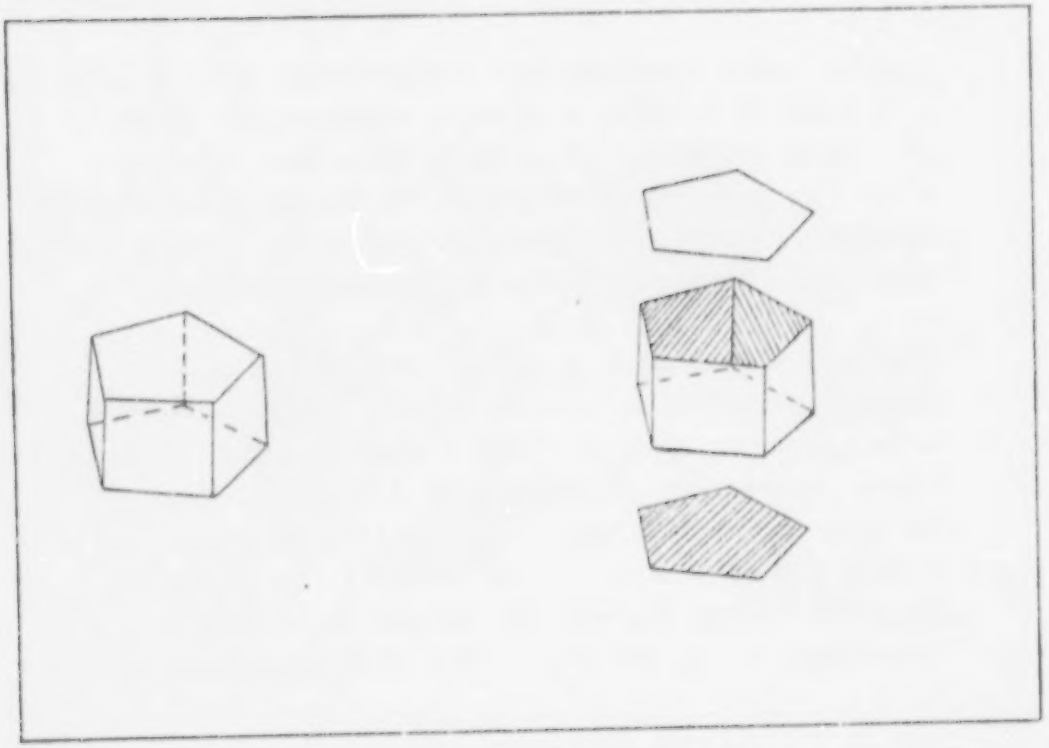


Figure 20: Structuration P_1

c) Fréquence d'utilisation:

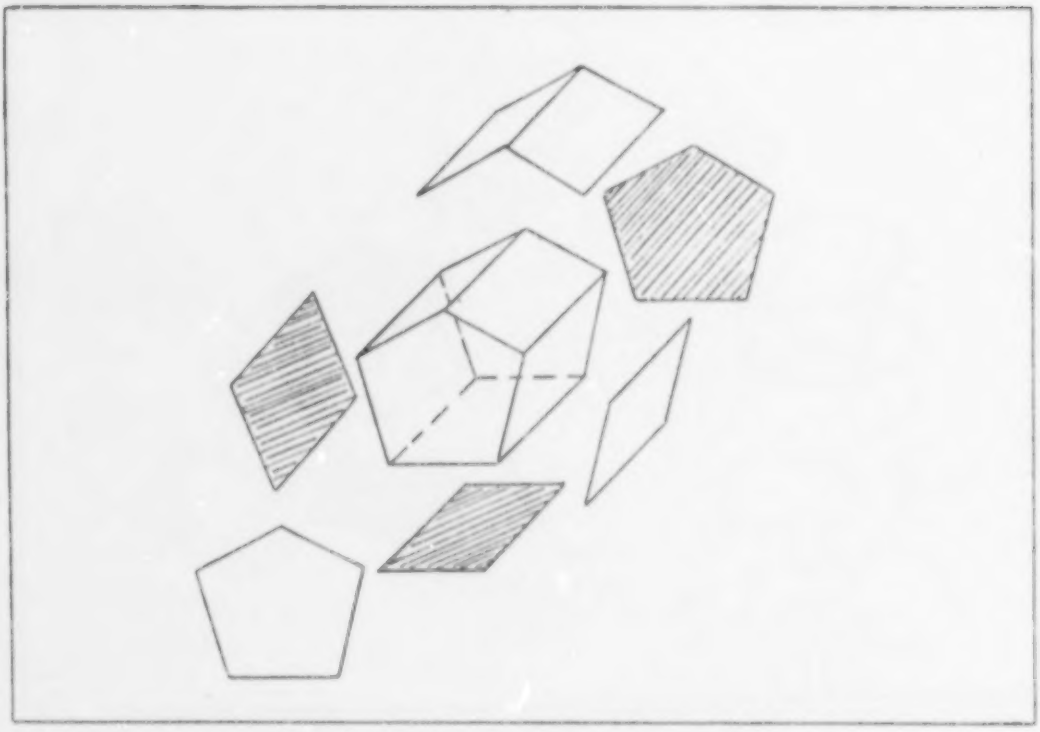
Candidats	Adultes	Enfants
achevée	9	10
Fragmentaire	0	0

3.1.2 a) Conception globale: cabane d'oiseaux

- le toit (2 faces);
- les murs (2 + 2);
- le plancher (1).

b) Comptage de faces:

2 + 2 + 2 + 1 = 7



Figrue 21: Structuration P_2

c) Fréquence d'utilisation:

Candidats	Adultes	Enfants
achevée	3	1
Fragmentaire	0	1

3.2 Antiprisme pentagonal R

2.2.1 a) Décomposition et recomposition:

- ceinture de triangles;
- deux couvercles (faces opposées parallèles).

b) Comptage de faces:

1 + 10 + 1 = 10 + 2 = 2 + 10 = 12

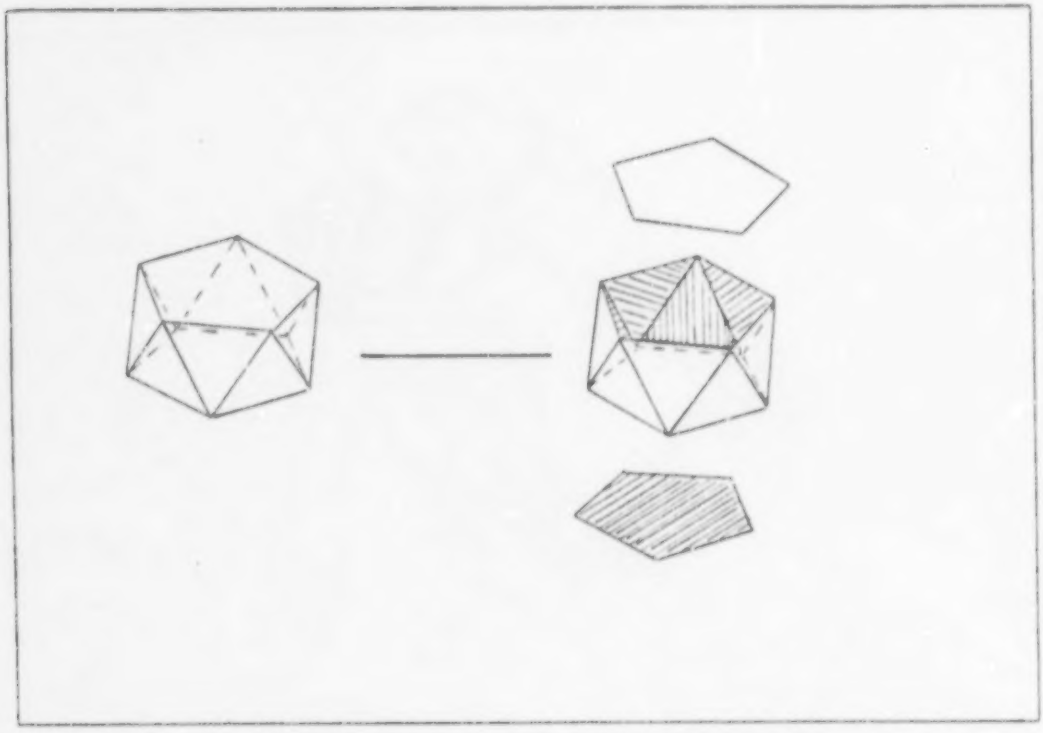


Figure 22: Structuration R_1

c) Fréquence d'utilisation:

Candidats	Adultes	Enfants
achevée	12	12
Fragmentaire	0	0

3.2.2 a) Décomposition et recomposition:

- 2 couronnes de 5 triangles;
- 2 couvercles (faces opposées parallèles).

b) Comptage de faces: 1 + 5 + 5 + 1 = 12

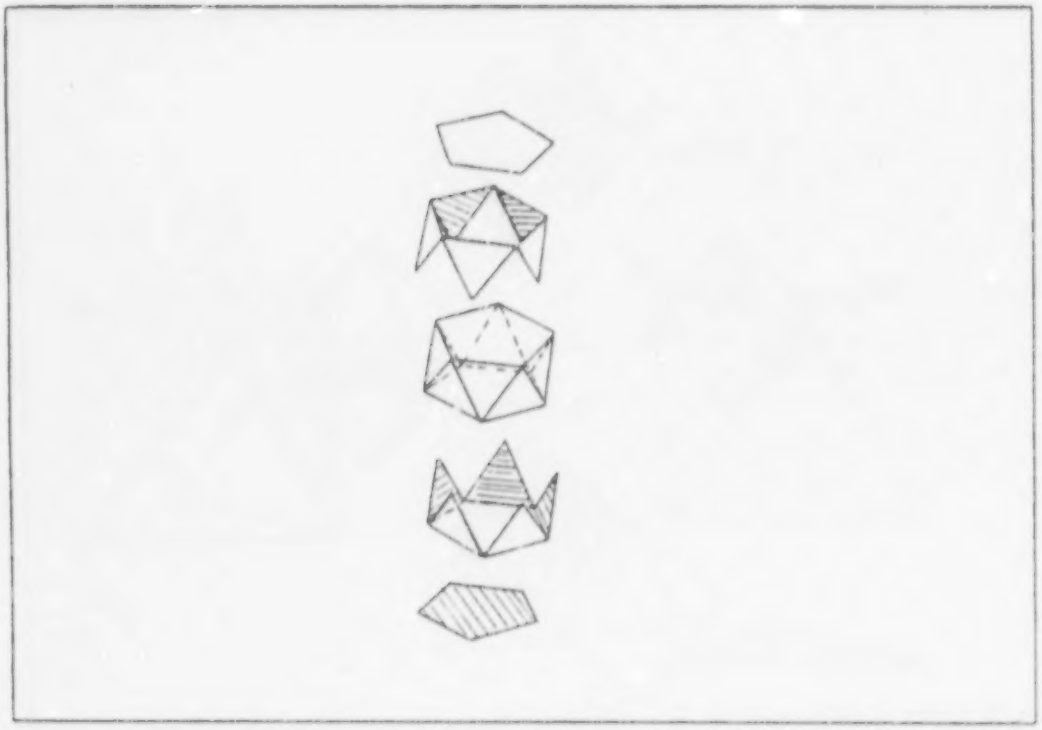


Figure 23: Structuration R_2

c) Fréquence d'utilisation:

Candidats	Adultes	Enfants
achevée	1	0
Fragmentaire	0	0

3.3 Octaèdre régulier S

3.3.1 a) Décomposition et recomposition:

2 capuchons de pyramide carrée.

b) Comptage de faces: 4 + 4 = 8

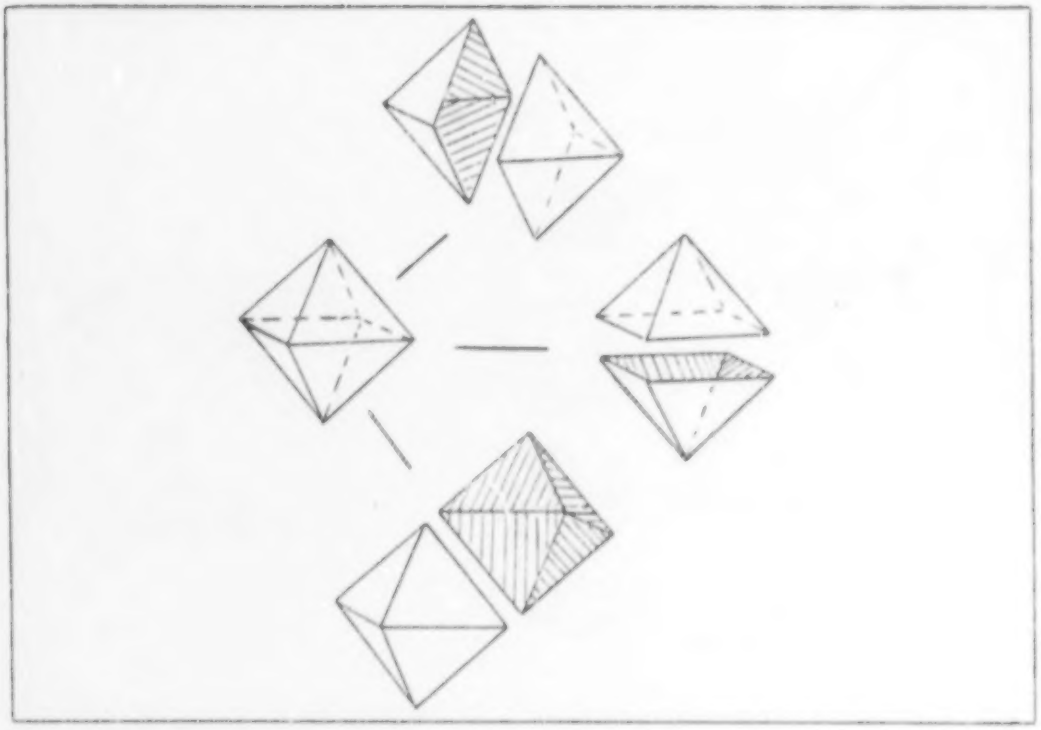


Figure 24: Structuration S_1

c) Fréquence d'utilisation:

Candidats	Adultes	Enfants
achevée	11	10
Fragmentaire	0	1

3.3.2 a) Décomposition et recomposition:

- ceinture de triangles;
- deux couvercles triangulaires (faces opposées parallèles).

b) Comptage de faces: 1 + 6 + 1 = 2 + 6 = 6 + 2 = 8

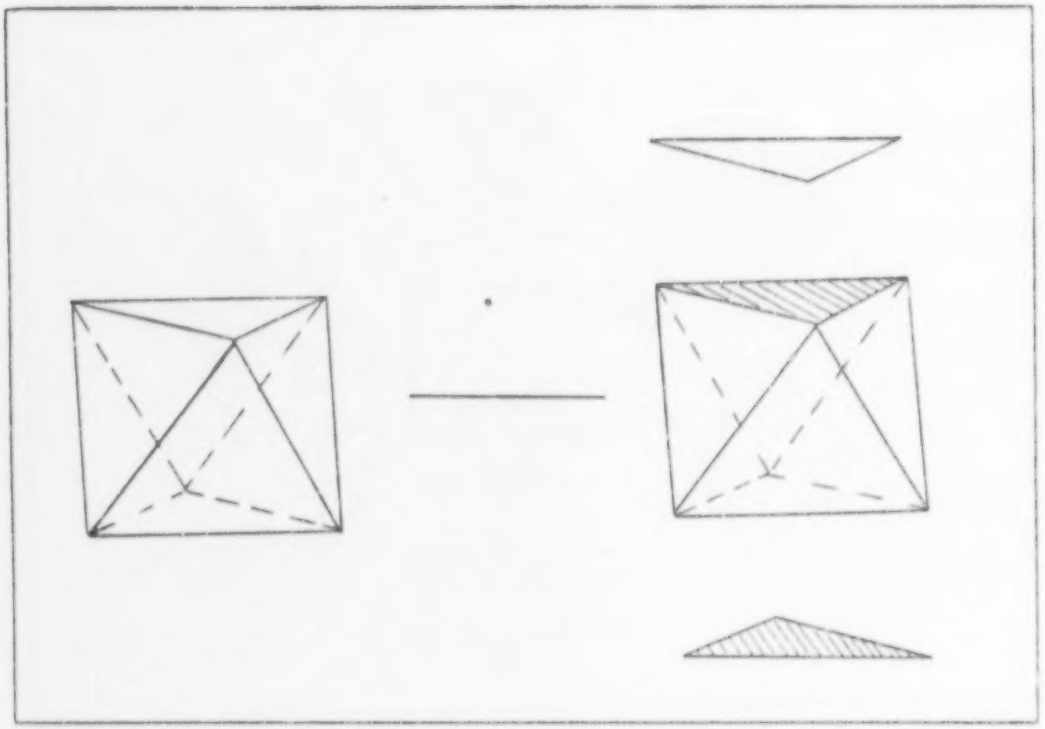


Figure 25: Structuration S_2

c) Fréquence d'utilisation:

Candidats	Adultes	Enfants
achevée	1	1
Fragmentaire	0	1

3.3.3 a) Décomposition et recomposition:

quatre paires de faces opposées.
(n'a été observée que de façon fragmentaire sans stimuler aucune procédure de comptage)

b) Comptage de faces:

$2 + 2 + 2 + 2 = 4 \times 2 = 8$

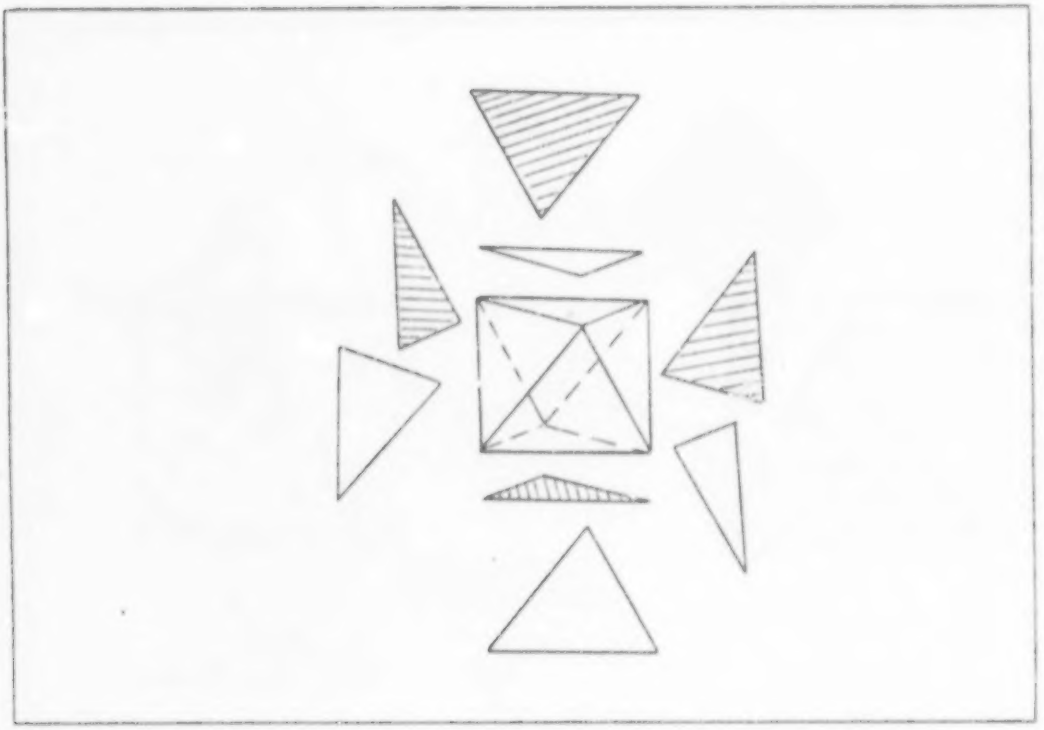


Figure 26: Structuration S_3

c) Fréquence d'utilisation:

Candidats	Adultes	Enfants
achevée	0	0
Fragmentaire	0	0

3.3.4 · a) Décomposition et recomposition:

six capuchons de pyramide carrée:
un à chaque sommet (recomposés,
les capuchons se recoupent).
(n'a été observée que de façon fragmentaire sans
stimuler aucune procédure de comptage).
Chaque face de l'octaèdre est alors
couverte 3 fois (elle touche à 3 sommets).

b) Comptage de faces: (6 x 4) ÷ 3 = 8

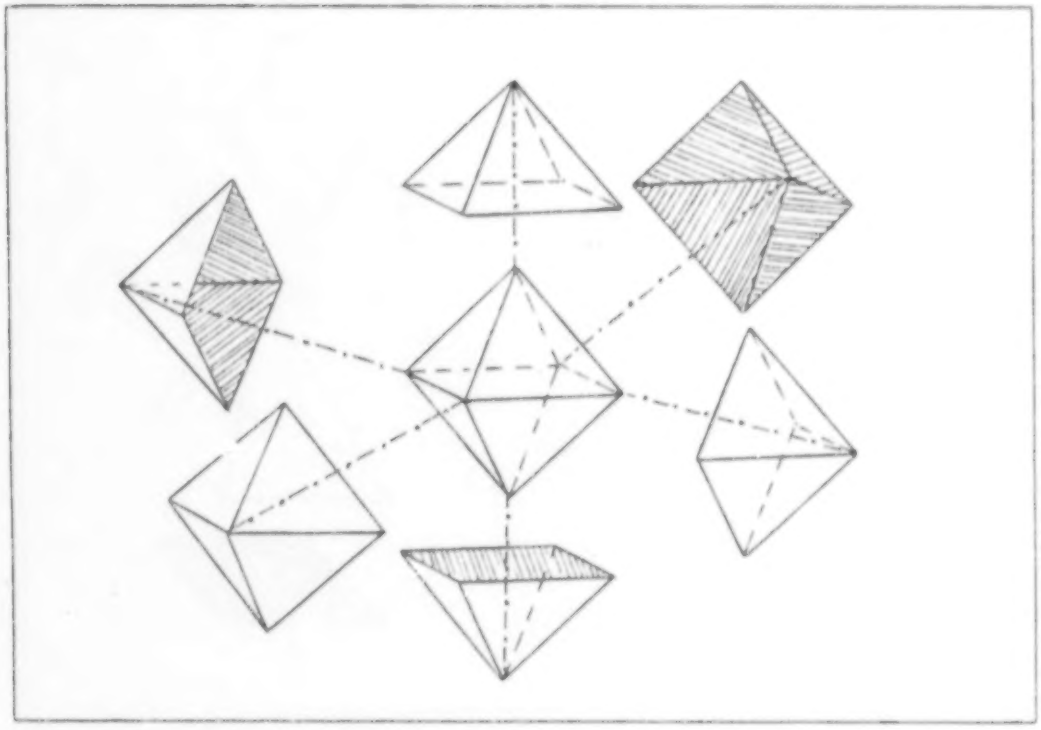


Figure 27: Structuration S_4

c) Fréquence d'utilisation:

Candidats	Adultes	Enfants
achevée	0	0
Fragmentaire	0	0

3.4 Pyramide carrée E

a) Décomposition et recomposition:

- capuchon de faces latérales triangulaires;
- base.

(seule structuration observée de ce polyèdre)

b) Comptage de faces:

1 + n = n + 1 où n = nombre de faces triangulaires du capuchon

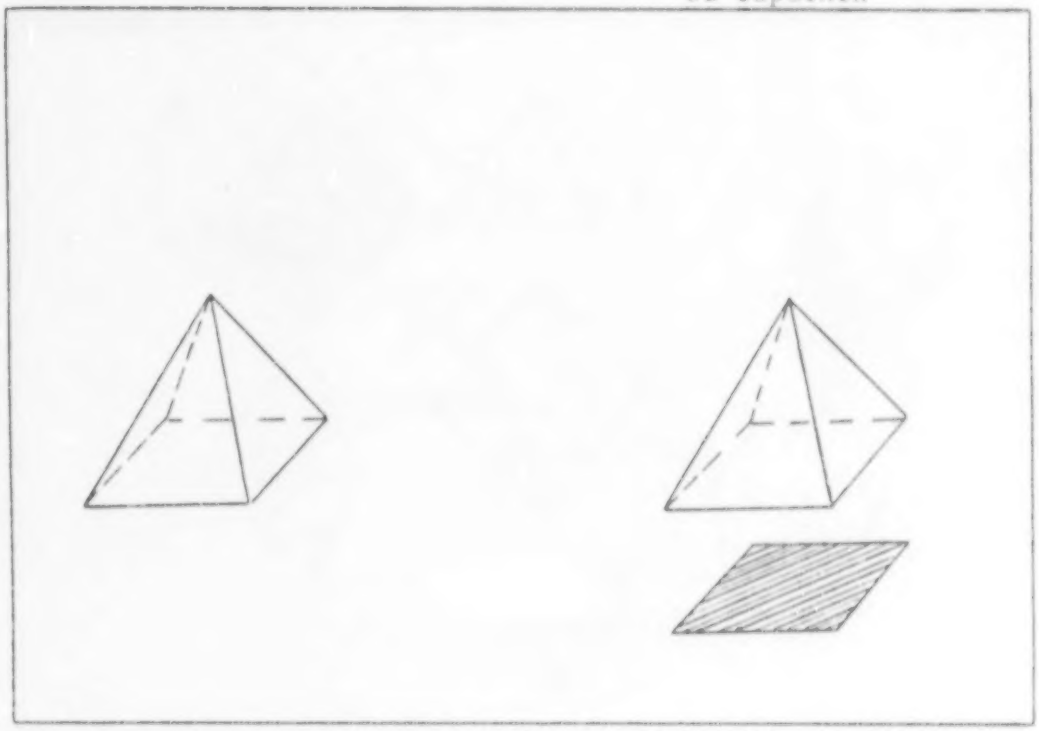


Figure 28: Structuration E_1

c) Fréquence d'utilisation:

Candidats	Adultes	Enfants
achevée	12	12
Fragmentaire	0	0

3.5 Icosaèdre régulier U

3.5.1 a) Décomposition et recomposition:

- ceinture de triangles;
- deux capuchons de forme pyramide pentagonale.

b) Comptage de faces: 5 + 10 + 5 = 20

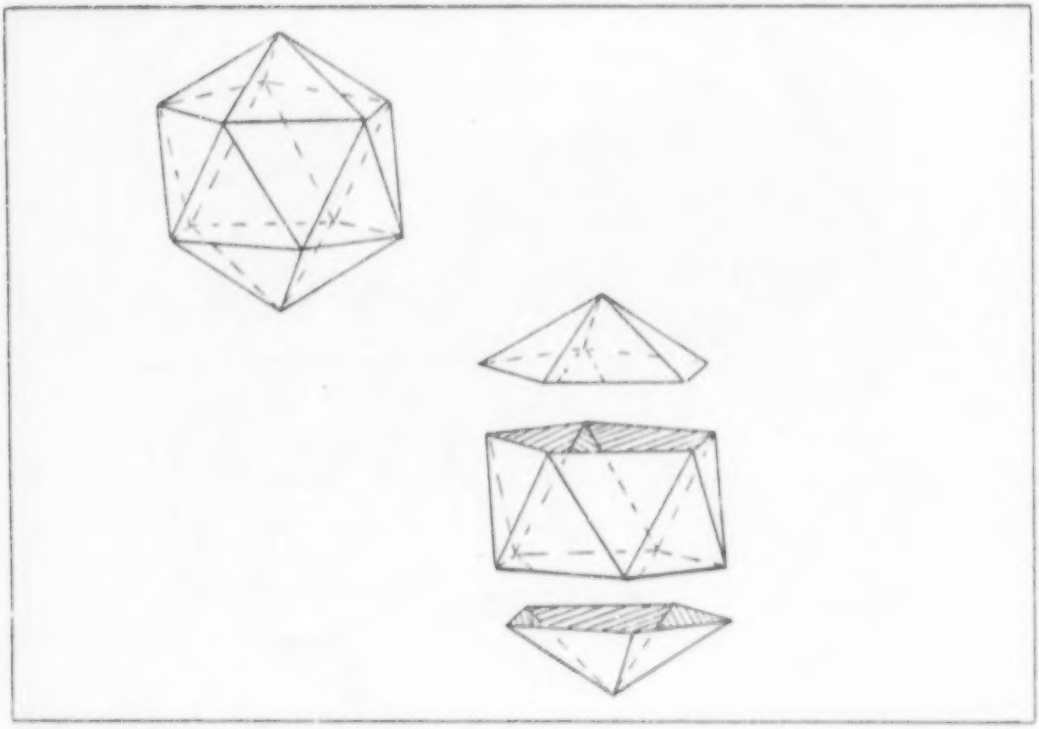


Figure 29: Structuration U_1

c) Fréquence d'utilisation:

Candidats	Adultes	Enfants
achevée	10	9
Fragmentaire	0	1

3.5.2 a) Conception:

tout sommet présente un capuchon de forme pyramide pentagonale.

b) Comptage de faces:

il y a 12 sommets à 5 faces triangulaires par sommet; il y a donc 12 x 5 = 60 faces au total dans les capuchons; ainsi nous avons compté chaque face trois fois car chaque face touche à trois sommets; le nombre total de faces de ce polyèdre est donc (12 x 5) ÷ 3 = 20.

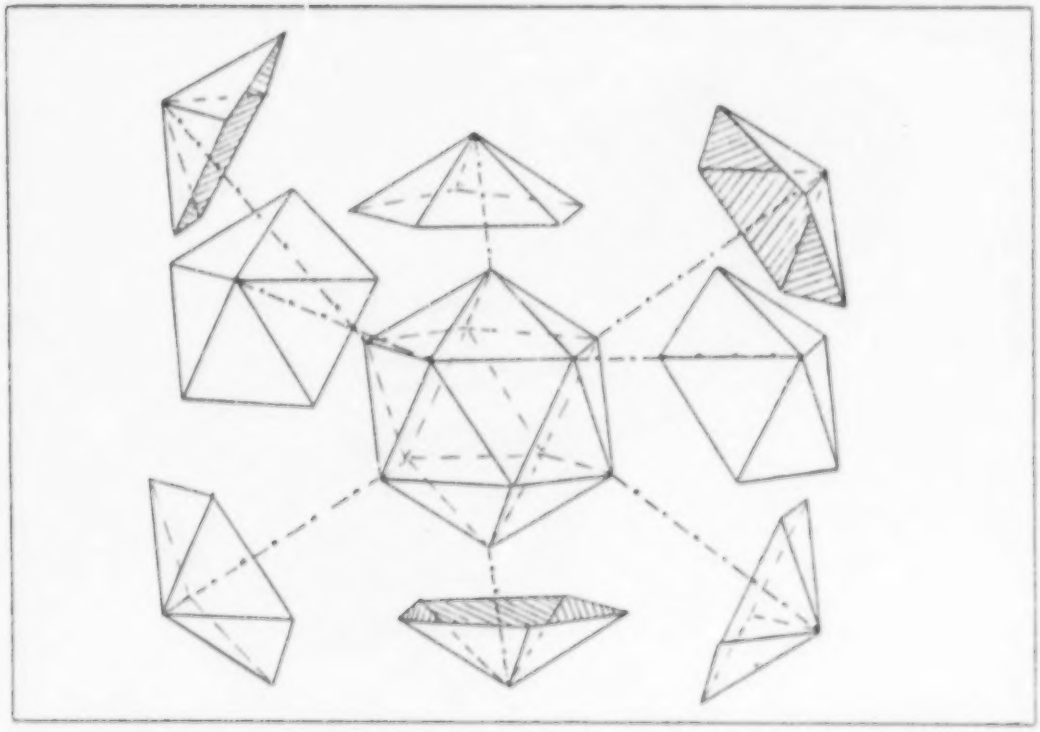


Figure 30: Structuration U_2

c) Fréquence d'utilisation:

Candidats	Adultes	Enfants
achevée	0	0
Fragmentaire	1	0

3.5.3 a) Décomposition et recomposition:

deux moitiés (calottes) chacune desquelles est composée d'un triangle central entouré de trois "trapèzes".

b) Comptage de faces:

$2 \times (1 + 3 \times 3) = 20$

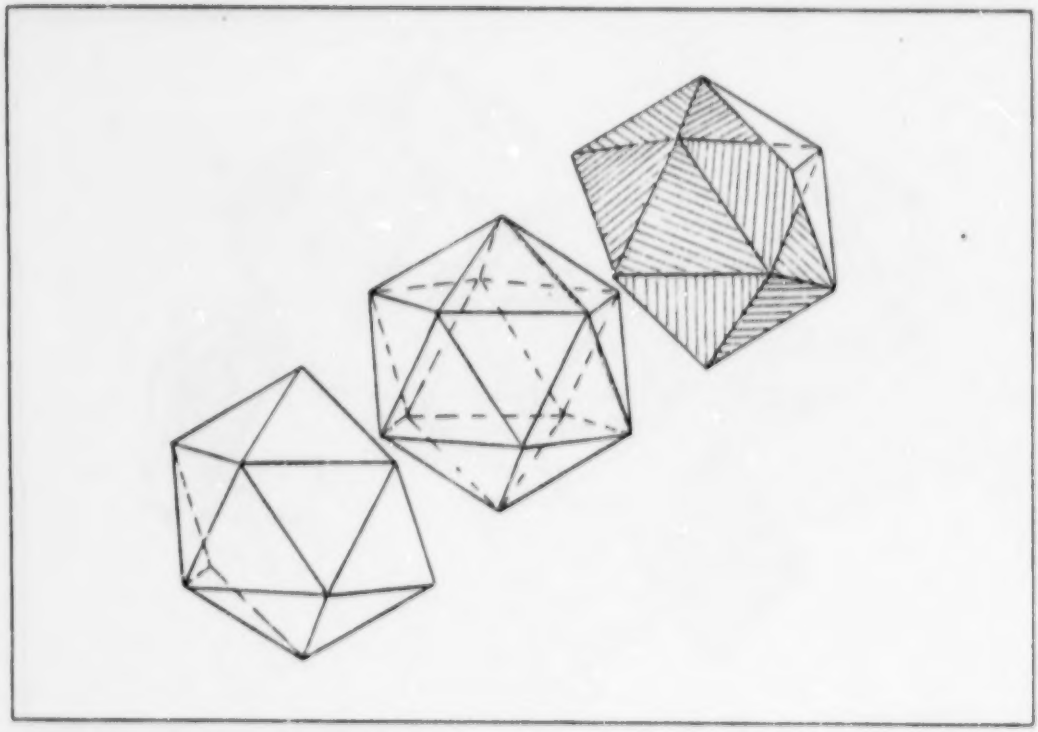


Figure 31: Structuration U_3

c) Fréquence d'utilisation:

Candidats	Adultes	Enfants
achevée	0	0
Fragmentaire	1	1

3.5.4 a) Décomposition et recomposition:

- coupure en deux parties le long du tracé _.-.-._.-._.-._

3.5.5 a) Décomposition et recomposition:

l'intention de vouloir décomposer l'icosaèdre en capuchons pyramidaux disjoints et adjacents suggère une décomposition en:

- trois capuchons;
- un triangle isolé;
- quatre triangles opposés au triangle isolé.

b) Comptage de faces:

$(3 \times 5) + 1 + 4 = 20$

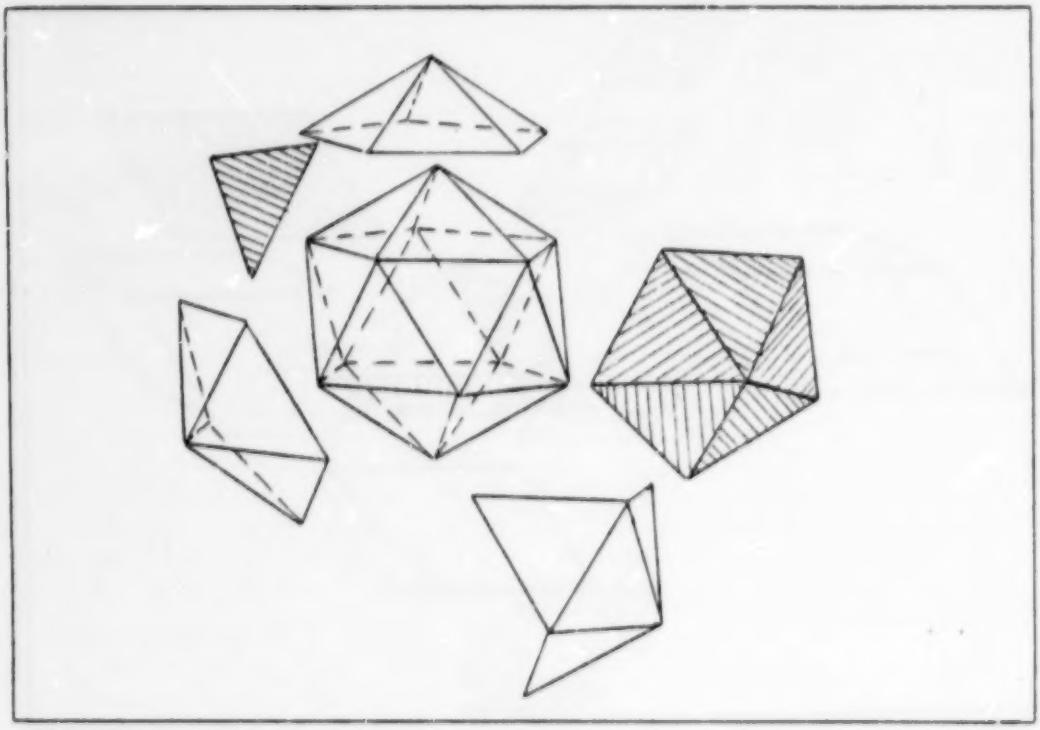


Figure 33: Structuration U_5

c) Fréquence d'utilisation:

Candidats	Adultes	Enfants
achevée	2	0
Fragmentaire	5	3

3.6 Parallélépipède I

3.6.1 a) Décomposition et recomposition:

- deux paires de faces adjacentes;
- une paire de faces opposées.

b) Comptage de faces:

$2 + 2 + (1 + 1) = 6$

$2 \times 2 + 2 = 6$

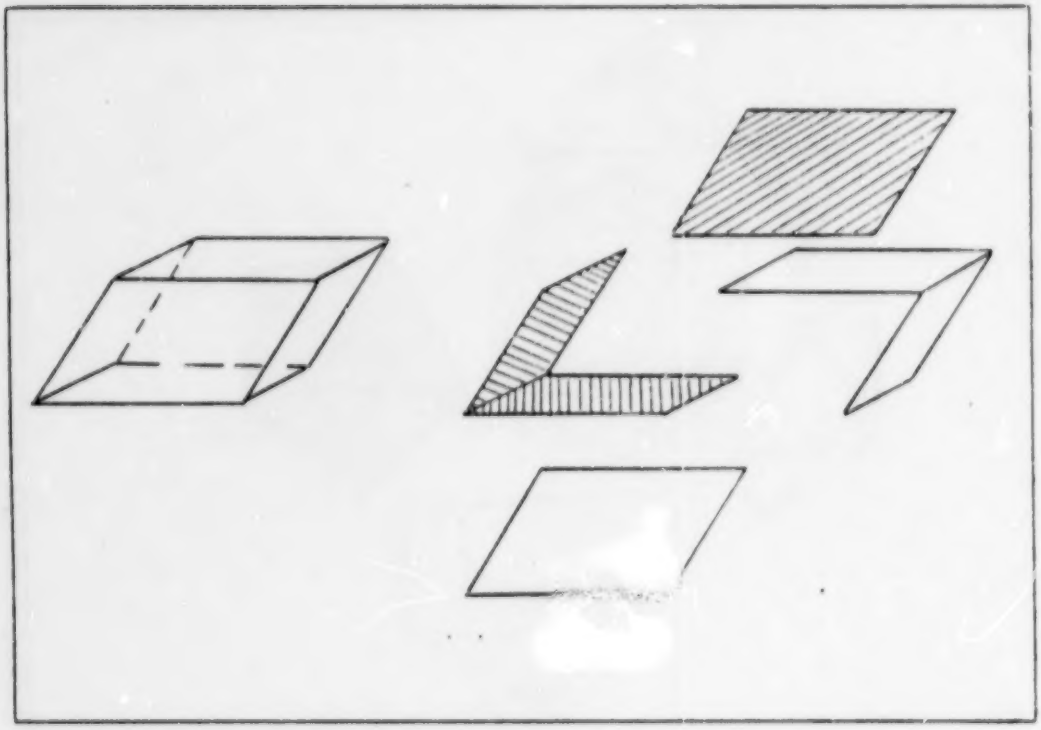


Figure 34: Structuration I_1

c) Fréquence d'utilisation:

Candidats	Adultes	Enfants
achevée	1	2
Fragmentaire	0	0

3.6.2 a) Décomposition et recomposition:

Conception du parallélépipède en tant que prisme:

- ceinture de parallélogrammes;
- paire de faces opposées.

b) Comptage de faces: 4 + 2 = 6

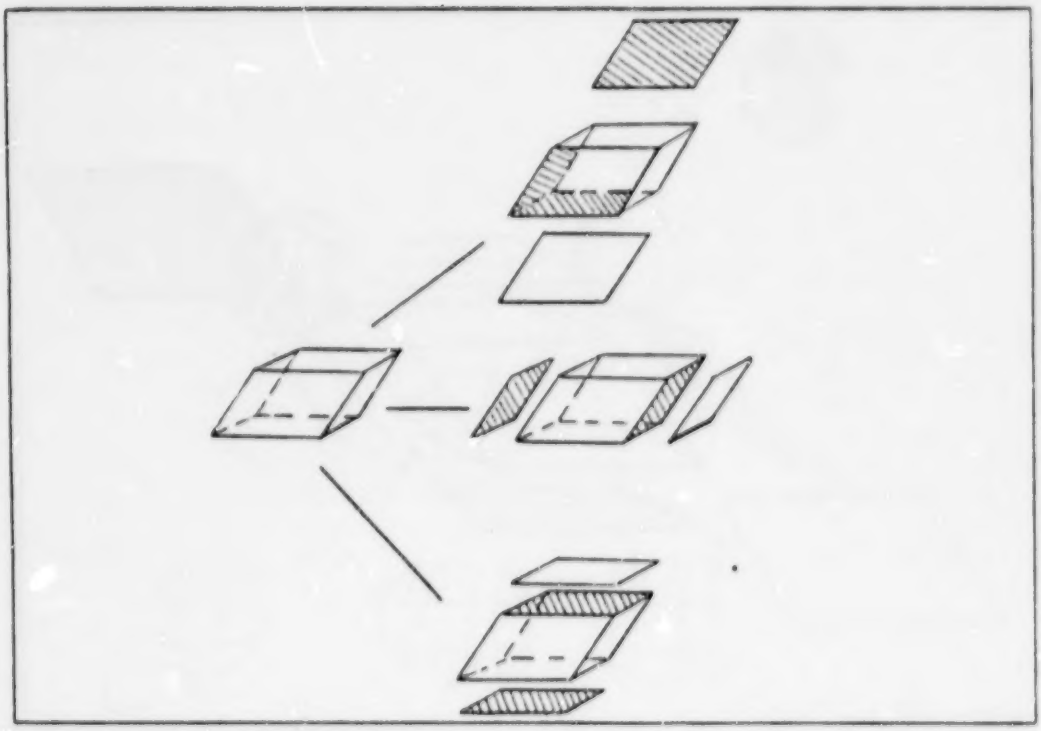


Figure 35: Structuration I_2

c) Fréquence d'utilisation:

Candidats	Adultes	Enfants
achevée	6	5
Fragmentaire	0	0

3.6.3 a) Décomposition et recomposition:

trois paires de faces opposées parallèles.

b) Comptage de faces: 3 x 2 = 6

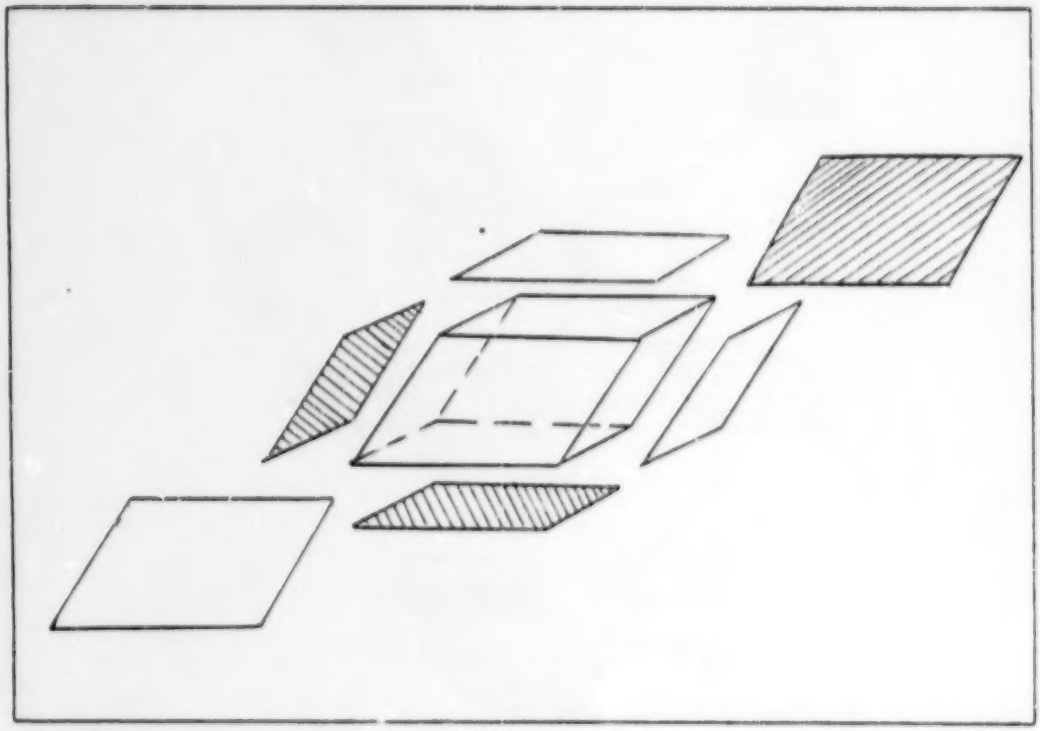


Figure 36: Structuration I_3

c) Fréquence d'utilisation:

Candidats	Adultes	Enfants
achevée	4	4
Fragmentaire	1	0

3.7 Rhombi-cuboctaèdre W

3.7.1 a) Décomposition et recomposition:

- ceinture de carrés;
- deux capuchons pouvant encore être décomposés de façons différentes (a,b,c).

b) Comptage de faces:

$$9 + 8 + 9 = (3 + 3 + 3) + 8 + (3 + 3 + 3)$$
$$= (4 + 5) + 8 + (4 + 5)$$
$$= (1 + 8) + 8 + (1 + 8) = 26$$

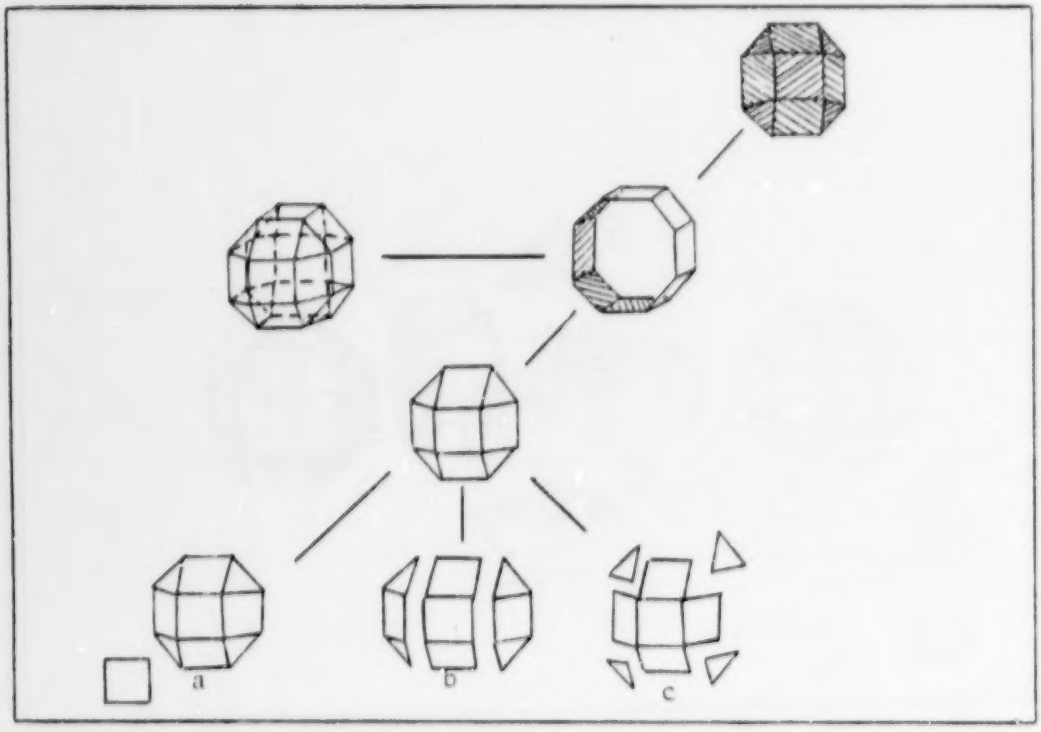


Figure 37: Structuration W_1

c) Fréquence d'utilisation:

Candidats	Adultes	Enfants
achevée	11	8
Fragmentaire	0	1

3.7.2 a) Décomposition et recomposition:

- trois ceintures de carrés non disjointes;
- deux ensembles de quatre triangles.

b) Comptage de faces:

$$8 + (8 - 2) + (8 - 4) + 4 + 4 = 26$$

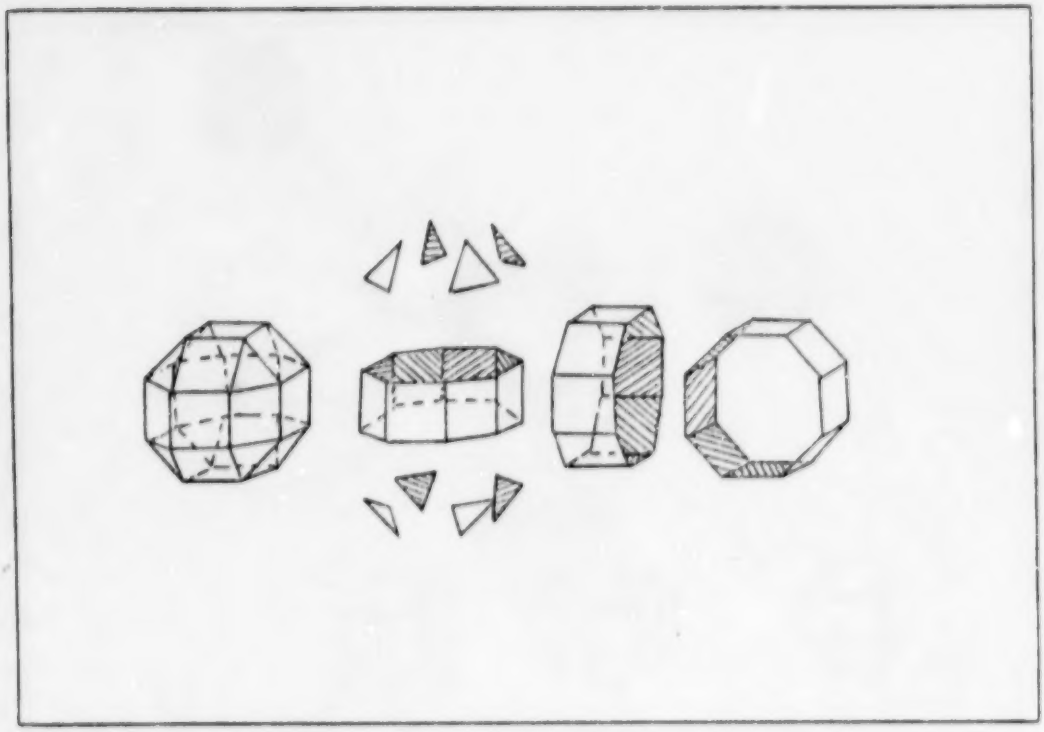


Figure 38: Structuration W_2

c) Fréquence d'utilisation:

Candidats	Adultes	Enfants
achevée	1	0
Fragmentaire	0	2

3.7.3 a) Décomposition et recomposition:

- ceinture de carrés;
- deux calottes troués;
- deux couvercles de calottes.

b) Comptage de faces:

$1 + 8 + 8 + 8 + 1 = 26$

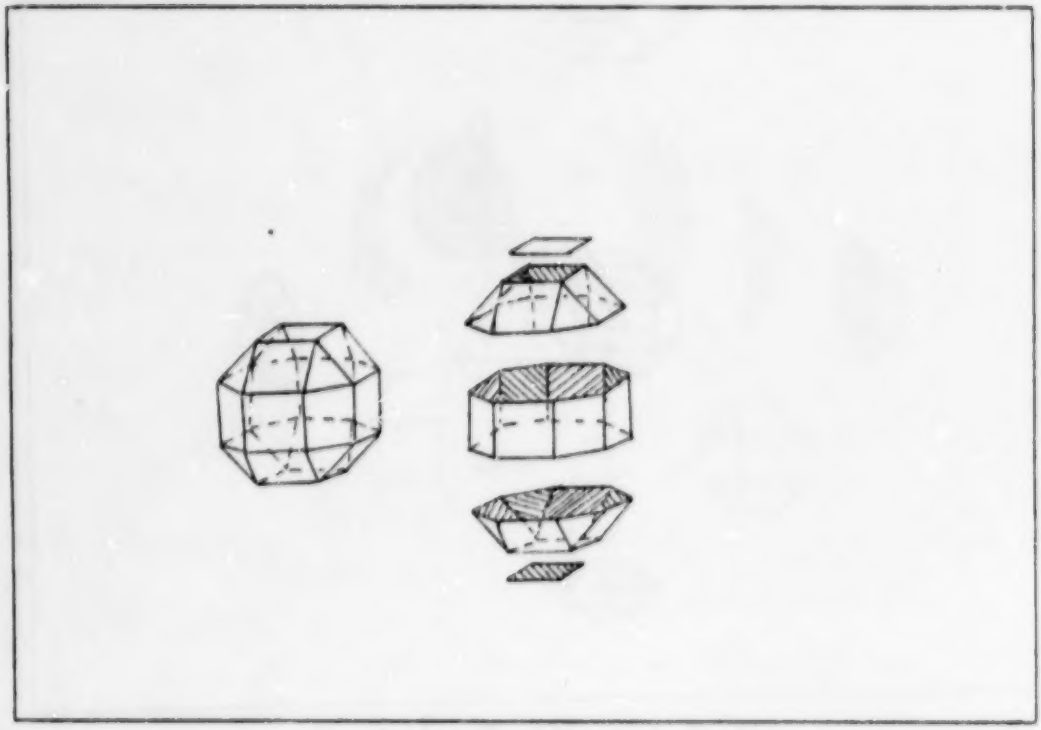


Figure 39: Structuration W_3

c) Fréquence d'utilisation:

Candidats	Adultes	Enfants
achevée	1	2
Fragmentaire	1	0

3.7.4 a) Décomposition et recomposition:

six capuchons non disjoints
(n'a été observée que de façon très fragmentaire
sans stimuler aucune procédure de comptage)

b) Comptage de faces:

$9 + (9 - 3) + (9 - 3) + (9 - 6) + (9 - 8) + (9 - 8) = 26$
ou $9 + 9 + (9 - 6) + (9 - 6) + (9 - 8) + (9 - 8) = 26$

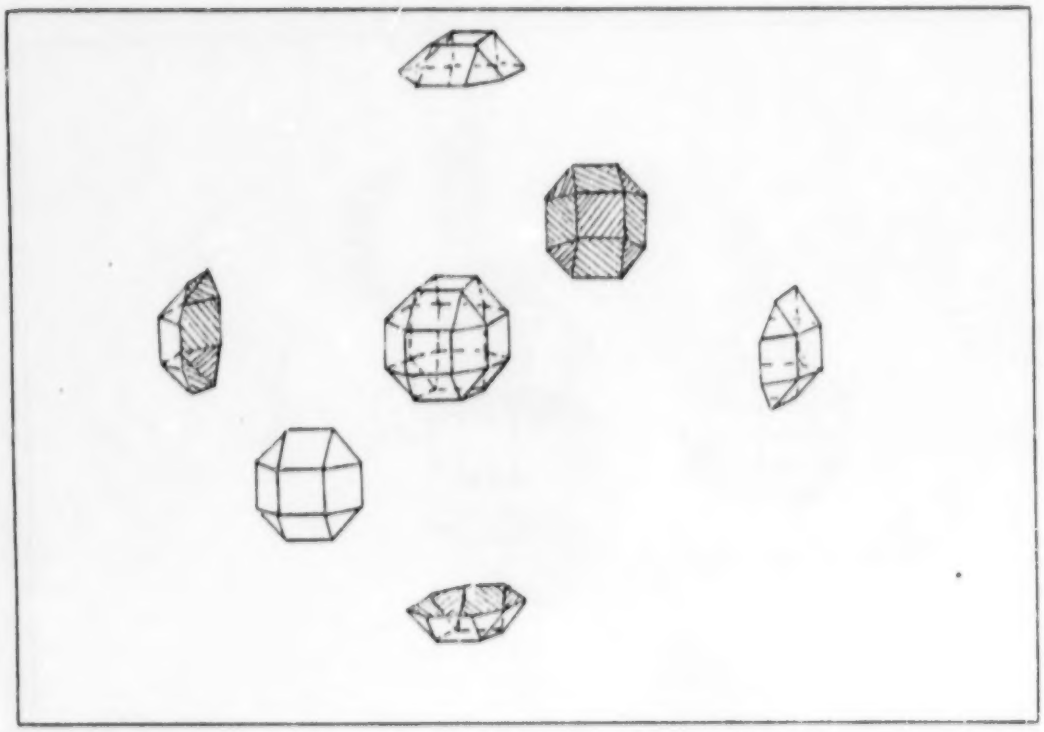


Figure 40: Structuration W_4

c) Fréquence d'utilisation:

Candidats	Adultes	Enfants
achevée	0	0
Fragmentaire	1	0

3.7.5 a) Décomposition et recomposition:

- quatre triplets de carrés;
- quatre triplets "triangle-carré-triangle";
- deux faces couvertures opposées.

b) Comptage de faces:

$4 \times 3 + 4 \times 3 + 2 = 26$

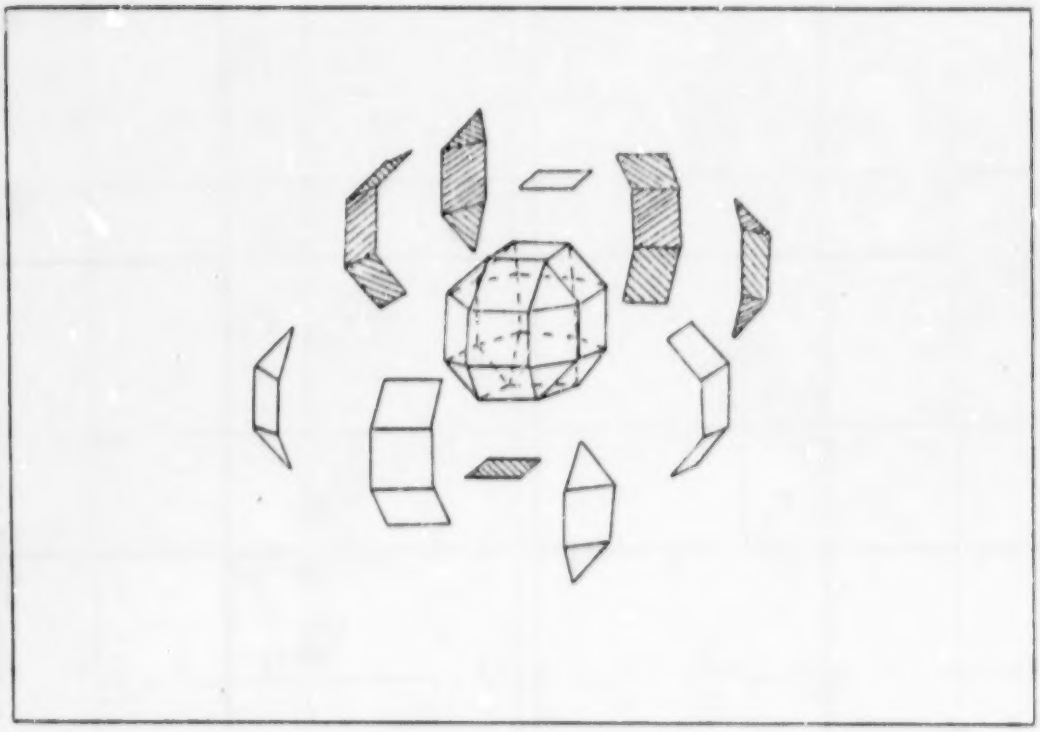
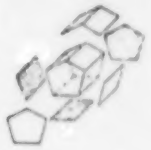
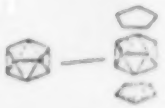


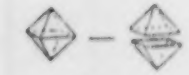
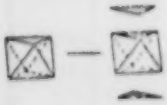
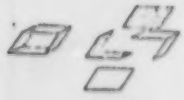
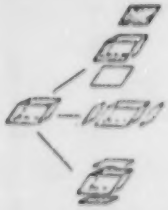
Figure 41: Structuration W_5

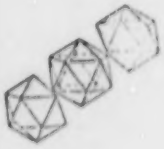
c) Fréquence d'utilisation:

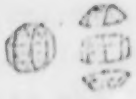
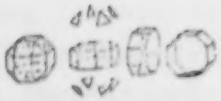
Candidats	Adultes	Enfants
achevée	1	0
Fragmentaire	0	3

3.8 TABLEAU SYNTHESE DES STRUCTURATIONS

Bloc	Structurations	Fréquence d'Utilisation					
		Achevée			Fragmentaire		
		Adultes	Enfants	Total	Adultes	Enfants	Total
E	E_1	12	12	24	0	0	0
P	P_1	9	10	19	0	0	0
	 P_2	3	1	4	0	1	1
R	 R_1	12	12	24	0	0	0
	R_2	1	0	1	0	0	0

Bloc	Structurations	Fréquence d'Utilisation					
		Achevée			Fragmentaire		
		Adultes	Enfants	Total	Adultes	Enfants	Total
S	 S_1	11	10	21	0	1	1
	 S_2	1	1	2	0	1	1
I	 I_1	1	2	3	0	0	0
	 I_2	6	5	11	0	0	0
	I_3	4	4	8	1	0	1

Bloc	Structurations	Fréquence d'Utilisation					
		Achevée			Fragmentaire		
		Adultes	Enfants	Total	Adultes	Enfants	Total
U	U_1	10	9	19	0	1	1
	U_2	0	0	0	1	0	1
	 U_3	0	0	0	1	1	2
	U_4	1	0	1	0	0	0
	U_5	2	0	2	5	3	8

Bloc	Structurations	Fréquence d'Utilisation					
		Achevée			Fragmentaire		
		Adultes	Enfants	Total	Adultes	Enfants	Total
W	 W_1	11	8	1º	0	1	1
	 W_2	1	0	1	0	2	2
	W_3	1	2	3	1	0	1
	W_4	0	0	0	1	0	1
	W_5	1	0	1	0	3	3

3.9 Commentaires relatifs aux structurations observées

Les manifestations du comptage systématique permettent donc de déterminer avec précision les structurations intérieures conçues et utilisées par les individus. Les parties constituantes du polyèdre entier sont clairement indiquées et les relations (de contiguïté spatiale) entre ces parties en ressortent de façon évidente. Malgré le fait que ces structurations ne sont pas, très probablement, indépendantes de la tâche du comptage des faces, elles donnent pourtant des indications précises sur la "vision" ou les visualisations possibles de ces objets géométriques par ces individus. Elles représentent ainsi des exemples précis, observables et tangibles de visualisation spatiale qui permettent de décrire et d'étudier plus spécifiquement cette habileté importante pour le développement d'idées spatiales.

Les différents blocs polyèdres ont stimulé différentes variétés de structurations (voir pp. 66 à 70). De façon comparable à la pyramide carrée, qui n'a suggéré qu'un seul type de structuration chez les 24 candidats,

- le prisme pentagonal P a été conçu comme tel, i.e. en tant que polyèdre P_1 constitué d'une paire de faces pentagonales reliées par une ceinture de rectangles et cela par 19 candidats, alors que quatre sujets seulement (3 adultes et un enfant) l'ont perçu plutôt comme la charpente d'une maison (toit, murs, plancher), structuration P_2;

- l'antiprisme pentagonal "R" a été perçu comme tel i.e. en tant que polyèdre R_1 constitué d'une paire de pentagones reliés par une ceinture de triangles par 24 candidats, alors qu'un seul sujet n'a fait usage de la structuration R_2 (2 couronnes de 5 triangles rattachées respectivement aux bases pentagonales);

- l'octaèdre régulier "S" a été perçu par la majorité d'entre eux (22) comme une "double pyramide" S_1 plutôt que comme un antiprisme triangulaire S_2 .

Quant au parallélépipède "I", il a suggéré, pour sa part, trois types de structurations dont les deux plus fréquemment utilisées sont: le prisme rectangulaire I_2, constitué d'une paire de rectangles reliés par une ceinture de parallélogrammes (11 candidats) et l'hexaèdre I_3 formé de trois paires de faces opposées parallèles (9 candidats). Quant à la structure I_1, constituée de 2 paires de faces adjacentes et d'une paire de faces opposées, elle n'a retenu l'attention que de 3 candidats.

L'icosaèdre "U" a suggéré, par ailleurs, une variété de cinq structurations mais avec une concentration très nette en faveur de la structuration U_1 i.e. celle ou l'icosaèdre est considéré comme formé de 2 capuchons de pyramides pentagonales lesquels sont reliés par une ceinture de triangles (20 candidats). La structure U_5 qui présente l'icosaèdre comme composé de trois capuchons adjacents disjoints de forme pyramide pentagonale, d'un triangle isolé et de 4 autres triangles opposés au triangle isolé, a retenu l'attention d'une dizaine de candidats dont 8 l'ont très bien reconnue,

sans pour autant, réussir à l'utiliser systématiquement pour un comptage sûr et précis. Quant aux trois autres structurations U_2, U_3, U_4 émanant de l'expérience menée avec l'icosaèdre U, elles n'ont été utilisées que par des candidats isolés (1 ou 2).

Le rhombicuboctaèdre "W" a eu un traitement comparable à celui de l'icosaèdre: cinq structurations différentes avec une forte dominante pour la structure W_1 i.e. celle où le bloc est considéré comme formé de deux capuchons de 9 faces reliés par une ceinture de 8 carrés. Cette structuration W_1 a été manifeste chez 20 candidats dont 19 de façon sûre. Quant aux autres structurations qui sont ressorties de l'expérimentation, mentionnons W_2 et W_4 qui ont été exploitées par un très petit nombre de candidats (3 et 1 respectivement) et qui ont présenté une difficulté majeure d'utilisation pour réaliser la tâche proposée; cela à cause des parties constituantes *non-disjointes* dans de telles structures. La structuration W_3, par contre, ne présentait, à cet égard, aucune difficulté notable; cependant elle a été très peu manifeste (3) à cause de son lien de parenté très marqué avec W_1 laquelle a prédominé chez les candidats. Quant à la structure W_5 quelques rares candidats (3) l'ont utilisée de façon fragmentaire et sporadique sans pour autant la faire servir à un comptage achevé.

A la suite de cette brève analyse, deux interrogations surgissent:

- est-ce possible que les *différents* polyèdres suggèrent une variété plus ou moins grande de structurations en

fonction même de leur complexité ou de leur régularité?

- est-ce téméraire de prétendre que les enfants, en général, révèlent une variété moins grande de structurations intérieures que les adultes? Il va sans dire que ces derniers sont plus aptes à *décrire* leur processus de comptage (attitude verbale et gestuelle), à affirmer ou confirmer la structuration qui guide ce processus, enfin à justifier le passage d'un type d'organisation mentale à un autre.

Dans ce contexte, il s'avèrerait important et intéressant de trouver réponse à ces interrogations par des comparaisons statistiques tirées d'une nouvelle expérimentation de comptage de faces de polyèdres menée auprès d'une clientèle appropriée et avec des blocs déterminés de façon à pouvoir infirmer ou confirmer les interrogations liées d'une part, à la régularité des blocs et, d'autre part, à la catégorie de candidats retenus.

Nous croyons de plus, qu'une étude plus détaillée et une analyse plus systématique de la variété de structurations intérieures suggérées par une *telle activité de comptage* pourrait s'avérer pertinente dans le cadre de la formation de notions comme celle de prisme, de pyramide et de polyèdre régulier.

4. L'émergence et le transfert de structurations intérieures

4.1 Les phénomènes de l'émergence

En plus de l'observation de l'existence de structurations intérieures et de leurs propriétés, il est d'un intérêt particulier d'observer en détails *l'émergence progressive et l'affirmation* de telles structurations. Si, pour certains polyèdres comme les prismes ou les pyramides simples, cette émergence est difficile à observer à cause de la conception presque immédiate d'une structure, l'organisation graduelle de polyèdres plus complexes comme l'icosaèdre régulier (U) ou le rhombi-cuboctaèdre (W) devient plus facilement observable.

Confrontés pour la première fois avec la tâche de compter les faces de ces polyèdres, la plupart des individus se révèlent nettement désorganisés. Alors que certains, malgré cette perplexité, s'engagent immédiatement dans l'activité de comptage même s'ils pressentent qu'ils échoueront faute de repère d'aucune sorte, d'autres, par ailleurs, sont beaucoup plus prudents: ils tournent et retournent le bloc dans leurs mains ou sur la table, afin d'y "découvrir" une façon d'organiser ses diverses parties et par là, assurer un comptage systématique.

Dans un cas comme dans l'autre, on assiste à l'émergence progressive d'une organisation de plus en plus précise et pertinente pour le comptage. Même si nous ne sommes pas en mesure de décrire en détails toutes les activités mentales qui se produisent lors de cette période d'émergence, les mouvements des doigts, les

séquences de mots de nombres nous semblent en dévoiler quelques-unes. D'abord, il semble que la manipulation du bloc, que ce soit lors du comptage immédiat ou lors de l'observation consciente en vue du comptage, soit à l'origine de toute organisation. Les tentatives de comptage systématique peuvent révéler des structurations partielles et instables lesquelles peuvent disparaître aussitôt à cause d'un accomplissement incomplet ou à cause de l'émergence d'une structuration compétitrice. Les répétitions de tentatives de comptage révèlent parfois des essais d'accomplissement de structurations fragmentaires qui mènent possiblement à l'affirmation d'une structuration précise. Parfois ces répétitions manifestent un conflit entre plusieurs organisations intérieures possibles que l'individu ne semble pas pouvoir dissocier consciemment.

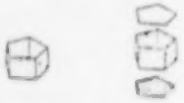
L'étude détaillée de tels phénomènes d'émergence de structurations intérieures par l'observation systématique des actions et des réactions des individus contribuera à illustrer et à préciser le processus dynamique de la genèse d'idées spatiales et, en particulier, celui de la création d'images mentales structurales de nature spatio-visuelle.

4.2 Transfert de structurations intérieures

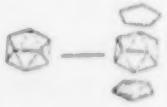
Les structurations conçues antérieurement et qui se sont avérées pertinentes pour d'autres polyèdres, s'imposent parfois aux individus dans la considération de nouveaux objets.

Ce phénomène de transfert est observable, par exemple, dans la séquence qui suit où un individu structure:

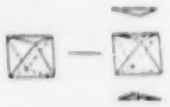
- le *prisme pentagonal* (P) en tant que paire de faces opposées reliées par ceinture de rectangles (P_1);



- l'*antiprisme pentagonal* (R) en tant que paire de faces opposées reliées par une ceinture de triangles (R_1) pour ensuite *transférer* la structure de la paire de faces opposées reliées par une ceinture de faces à



- l'*octaèdre régulier* (S), qu'il conçoit ainsi en tant qu'*antiprisme* (S_2). (Habituellement ce bloc est plutôt conçu en tant que *double pyramide* (S_1)).



Par la suite, l'individu tente de *transférer* cette structure à l'icosaèdre régulier (U) qui ne peut pas être conçu en tant que ceinture de faces reliant deux faces opposées. Cette conception doit alors être écartée avant que d'autres structurations plus efficaces ne puissent être engendrées.

A l'occasion, le transfert d'une structuration préalable permet à l'individu de résoudre un problème jusque là insoluble. Une telle situation a été observée lorsqu'une étudiante qui ne pouvait réussir à compter les faces de l'icosaèdre régulier (U) de façon systématique a abandonné cette tâche, pour subséquemment structurer

le rhombi-cuboctaèdre (W) en tant que paire de capuchons reliés par une ceinture de carrés (W_1). Lors d'une reprise du comptage des faces de l'icosaèdre régulier (U) elle constata alors que "c'était la même chose" et structura ce polyèdre en tant que paire de capuchons (de forme pyramidale) reliés par une ceinture de triangles (U_1).

Ces phénomènes de transfert de structurations intérieures fournissent des indications précieuses relatives à la généralité et à la stabilité d'une structuration conçue et elles nous donnent alors des éléments susceptibles de décrire le développement de ces structurations. L'étude des phénomènes de transfert pourrait aussi s'avérer utile pour la conception de séquences d'apprentissage car ces phénomènes pourraient permettre de diriger le processus d'apprentissage.

Résumé et prospectives

Les possibilités d'observation des activités mentales de l'individu, sans que celui-ci n'ait à les décrire verbalement, nous apparaît comme le résultat le plus fascinant de cette recherche exploratoire. Les actions concrètes que l'individu effectue sur un objet, les mouvements des doigts, les séquences des mots de nombres ou le rythme du comptage ainsi que quelques expressions gestuelles ou verbales, nous semblent dévoiler, au moins partiellement, les images mentales et structurales que l'individu se construit d'un objet donné dans le cadre de la tâche qui lui est proposée.

Ces images mentales stimulées par l'activité du comptage de faces (aussi bien chez les enfants que chez les adultes) revêtent un caractère spatio-visuel et dynamique. Elles semblent être la synthèse de perceptions variées de l'objet concret et des effets qu'ont les actions et les manipulations de l'individu sur ces perceptions. Ces images comportent un aspect figuratif aussi bien qu'un aspect opératoire et représentent, pour cette raison, des exemples de *visualisations spatiales*.

De plus, des images mentales sont structurées par des opérations spatiales qui décomposent l'objet en parties constituantes et le recomposent en un tout organisé. Elles fournissent donc des exemples de *groupements infralogiques* dans le sens de Piaget ou des *structures visuelles* dans le sens de van Hiele. Comme nous l'avons pu observer, ces structures du premier niveau de van Hiele permettent à l'individu de se comporter de façon cohérente même si celui-ci réagit plutôt par des actions et par des gestes que de manière explicative et verbale sur ces structures.

Ce phénomène témoigne d'une pensée qui se situe au niveau visuel de van Hiele et révèle une manière d'agir qui est basée davantage sur l'*intuition spatiale*.

Les observations de l'émergence graduelle de ces structures font reconnaître en même temps qu'elles démontrent l'importance des manipulations et des actions pour stimuler, chez l'individu, ces conceptions. Ces observations révèlent également l'existence d'une activité mentale intense durant cette période de recherche et d'émergence de structurations.

En plus des résultats particuliers, que nous venons de décrire, cette étude exploratoire nous fournit deux filons-guides susceptibles d'orienter par la suite des recherches plus systématiques.

A) Le sujet d'étude

Les structures de nature *spatio-visuelles*, qui sont, aussi bien d'après Piaget que van Hiele, à l'origine de la genèse et du développement d'idées spatiales et dont cette étude nous révèle l'existence chez l'individu, doivent être étudiées de façon plus détaillée et telles qu'elles se manifestent chez l'apprenant.

Dans ce contexte, il s'agit avant tout d'enrichir *l'inventaire des structures spatio-visuelles* que l'on a pu observer; cela en fonction des tâches qui les ont stimulées et dans le but de connaître davantage leur caractère "prélogique", de même que leurs manifestations chez l'individu. Il s'avère, en même temps important de raffiner la description de leur émergence et de leur affirmation.

L'étude du développement de ces structures par l'application d'interventions didactiques adéquates tentera, par la suite, de déterminer des mécanismes par lesquels ces structures visuelles peuvent être mutées (transformées) en des structures descriptives (terminologie de van Hiele).

Dans le contexte du comptage de faces de polyèdres, une telle séquence de recherches pourrait être schématisée comme suit:

1. Emergence et existence de structures visuelles:

Conception globale d'objets géométriques —(Structuration intérieure stimulée par une tâche (comptage de faces))→ Structure spatio-visuelle d'objets géométriques

2. Développement de structures visuelles: conscientisation de ces structures par l'explicitation de procédures et de propriétés:

Structure spatio-visuelle d'objets géométriques —(Explicitation verbale stimulée par une intervention didactique adéquate)→ Structure descriptive (objets géométriques comme porteurs de propriétés)

La tâche initiale proposée constitue l'élément-clef pour de telles expériences; puisqu'elle doit stimuler chez l'individu la conception de structures visuelles. Il faut également s'attendre à ce que ces structures varient selon les tâches ou les problèmes posés, d'où l'importance de leur accorder une attention particulière.

Dans ce contexte, il semble opportun de distinguer deux types de tâches qui risqueraient d'engendrer des processus différents tout en étant susceptibles de stimuler la conception de structures visuelles.

Un premier type de tâches, dont fait partie le comptage des faces, fait *décomposer* une entité (originellement perçue de façon globale) en des parties constituantes qui, par la suite, sont *recomposées* en un tout organisé ou structuré. Le point initial d'une telle tâche est donc la présentation d'une entité globale précise dont il s'agit d'identifier des parties constituantes ainsi que des relations spatiales mutuelles existant entre ces parties. Dans ce type de tâches, nous cherchons donc à observer l'identification, par l'individu, des parties constituantes de l'entité proposée ainsi que la conception des relations spatiales qu'il établit entre ces parties.

Voici quelques autres exemples de ce type de tâches:

- comptage d'arêtes ou de sommets de polyèdres;
- identification de chemins variés sur des polyèdres (succession d'arêtes, longueurs respectives, ...);
- construction d'une reproduction d'un polyèdre donné à l'aide de divers matériels;
- reconnaissance de blocs polyèdres dans des dessins variés;

- identification de formes diverses dans des grillages triangulaires, carrés ou autres (tapis de TRIBI, de chiens, ...);
- etc..

Un deuxième type de tâches consiste à *composer* des entités plus ou moins complexes à partir d'éléments de base (composables); ces entités complexes peuvent ensuite être *décomposées* ou *transformées* de diverses façons. De telles tâches proposent donc de partir d'éléments de base et d'opérations élémentaires pour en composer des entités complexes qui ne sont pas nécessairement prédéterminées de façon unique. En fonction de la tâche particulière assignée, nous cherchons ici à observer les (diverses) entités composées, les façons de composer ces entités, l'identification de sous-entités, enfin la conception de relations spatiales entre les éléments de ces entités.

Voici quelques exemples de ce deuxième type de tâches:

- exploration de formes tri-dimensionnelles à construire à partir de matériels variés (J. Baracs: Poly-Kit pour polyèdres; TRILOGIC pour la construction de Deltaèdres, etc.);
- exploration de formes bi-dimensionnelles à construire à partir de triangles équilatéraux (deltagones) ou de carrés (polyominos), à partir de matériels multiformes (TRIBI, TANGRAMS, etc.);
- construction de tours à partir de cubes emboîtables de diverses couleurs (voir par exemple le mémoire de S. Lecomte, cité en page 33);
- casse-tête variés;
- etc..

Ces deux types de tâches sont, pour ainsi dire, l'inverse l'une de l'autre. Le premier, partant d'entités globales pré-données et identifiant des parties détaillées et des relations spécifiques entre les parties, oriente l'apprenant d'une conception globale vers une indication de détails; il est pour cela de *nature analytique*. Par contre, le deuxième à partir d'éléments constituants, construit des entités complexes et composées; pour cela, il présente souvent la fascination d'une création originale et étonnante pour un individu; ce type de tâches est plutôt de *nature constructive*. L'enfant rencontre dans son environnement naturel ces deux types de situations; il faudra alors les étudier sur un pied d'égalité, mais il semble opportun de les distinguer à cause de leur nature différente ou complémentaire.

B) La méthode

Comme nous le manifeste l'expérience précédente, la méthode clinique selon Piaget[1], communément appelée aujourd'hui "la méthode de l'exploration critique", semble être la façon la plus appropriée pour mener de telles investigations. Wittmann[2] distingue, dans le cadre de cette méthode, quatre types d'investigations:

- les *études macrogénétiques* du développement mental: dans une série d'expériences, on étudie le comportement d'enfants de différents groupes d'âges afin d'obtenir un aperçu de la genèse à long terme de certains concepts;

1. S. Opper, Piaget's Clinical Method, Journal for Children's Mathematical Behavior, vol. 1 (1977), no. 4.
2. E. Wittmann, Psychologisch-didaktische Experimente zur Entwicklung des mathematischen Denkens, Vieweg, Braunschweig, 1982.

- *les expériences d'apprentissage:* de telles expériences sont caractérisées par une phase d'apprentissage dont le but est de développer ou d'accroître le répertoire cognitif de l'enfant en provoquant chez-lui des conflits cognitifs et en stimulant ainsi son activité mentale;
- *les expériences d'enseignement:* de telles expériences permettent d'étudier comment tel type d'enseignement est adapté au répertoire cognitif de l'enfant et comment, de plus, cet enseignement mobilise pertinemment ce répertoire;
- *les études microgénétiques de processus:* dans ces expériences, il s'agit d'étudier les processus inhérents à l'accomplissement d'une tâche dans des situations précises de problèmes; il s'agit alors ici de l'étude de processus relatifs à la conception de "modèles" en fonction de tâches précises.

Les investigations relatives à l'identification de structures spatio-visuelles conçues par l'individu de même que les études d'émergence et d'affirmation de ces structures en fonction de la tâche précise à réaliser se placent alors et avant tout dans le cadre des *études microgénétiques de processus*. Les structures spatio-visuelles conçues par l'individu représentent des "modèles" qui lui permettent de résoudre le problème posé. L'identification de la nature de ces "modèles" ainsi que l'étude de leur conception graduelle constituent le coeur même de ces investigations.

Dans ce genre d'expériences, le choix de la tâche et du matériel qui l'accompagne est primordial. Puisqu'il s'agit ici d'étudier les cheminements non-dirigés et les conceptions spontanées de l'individu, il appert que les interventions de l'intervieweur doivent être réduites au minimum; seules les interventions susceptibles de clarifier les activités cognitives de l'individu sans en influencer le caractère ni la direction sont souhaitables. Quant à la tâche proprement dite, elle doit être facile d'accès; elle doit être de nature à ce qu'une progression dans son accomplissement soit observable. Finalement, le matériel et la tâche doivent être choisis de façon à ce que, durant l'acquittement de cette dernière, la pensée de l'individu puisse se manifester dans les actions et dans les gestes qu'il pose sans que, pour ce faire, il lui soit nécessaire de recourir à des expressions verbales. Ce dernier point s'avère d'une importance manifeste dans le contexte d'étude de structures spatio-visuelles puisque ces dernières se situent à un niveau qui précède le niveau descriptif-verbal. La tâche de l'expérience précédente (comptage des faces de polyèdres) ainsi que celle de la construction de tours (voir rapport no. 24 cité en page 30 ainsi que le mémoire de S. Lecomte cité en p. 33) sont particulièrement appropriées à ce genre d'expériences que nous venons de décrire.

Par ailleurs, l'étude du développement progressif des structures spatio-visuelles vers des structures descriptives au moyen d'interventions didactiques adéquates se situe davantage dans le contexte *d'expériences d'apprentissage*. En effet, il s'agit ici de "conscientiser" chez l'enfant les structures spatio-visuelles et de les faire décrire plus objectivement afin qu'il en

tire des propriétés pertinentes pour caractériser les objets (entités) géométriques. Ce développement va nécessairement de pair avec la création d'un langage descriptif; il implique de la part de l'expérimentateur, une attention particulière aux expressions verbales de l'individu qu'il observe. Dans ce genre d'expériences, on étudie les effets que peuvent avoir diverses interventions didactiques relatives à la progression de l'individu dans la conception de structures descriptives. C'est pourquoi ces interventions revêtent une importance particulière; aussi le rôle joué par l'intervieweur peut-il devenir crucial et délicat. Ce dernier doit alors, à l'aide d'impulsions (stimulations) prudentes, tenter de diriger l'activité mentale de l'individu tout en observant et respectant les obstacles (d'ordre individuel ou général) que l'apprenant peut rencontrer. Bien que ces interventions peuvent être préparées à priori d'après les effets hypothétiques qu'elles peuvent produire puis, ordonnées d'après une analyse de la démarche que l'on veut stimuler, elles doivent être menées de manière à permettre l'expérimentateur de tenir compte des obstacles qu'il rencontre et de s'ajuster aux différences individuelles qui se manifestent.

Il va sans dire que ces modes d'investigation ne sont pas encore bien établis et précisés. Ils font actuellement l'objet de discussions fréquentes et animées [GINBURG, FLM, 1 no. 3, et autres], à cause de leur caractère non conventionnel (disputé) et à cause de leur efficacité potentielle. Selon les résultats de l'expérience qui précède, les moyens audiovisuels se sont avérés, dans le cadre de ces investigations, des outils essentiels aussi bien en

tant qu'instrument facilitant l'analyse des observations que comme moyen de communication et d'explicitation des résultats. La spécification et la description de plus en plus précise de cette méthode clinique feront donc nécessairement partie de telles "explorations critiques" en ce qui a trait à la genèse et au développement de structures spatio-visuelles chez l'individu.